Всесибирская олимпиада школьников 2011-2012 г. по математике
Заключительный этап
7 класс

Время выполнения задания 4 астрономических часа *Каждая задача оценивается в 7 баллов*

7.1. Имеются 9 кг крупы, чашечные весы и гиря весом 200 г. Можно ли отвесить 2 кг крупы за 3 взвешивания? Напоминаем, что чашечные весы показывают только, равны ли веса грузов на левой и правой чашках.

7.2. Можно ли записать в каждой вершине куба одно из чисел 1, 2,…,8 так, чтобы суммы чисел в вершинах каждой грани были одинаковы?

7.3. Расположите в ряд натуральные числа от 1 до 10 в некотором порядке так, чтобы после сложения каждого числа с его порядковым номером (считая слева направо) и перемножения полученных десяти сумм, получился куб натурального числа.

7.4. Пусть $a < b < c < d$ – натуральные числа. Доказать, что наименьшее общее кратное этих чисел не меньше, чем $4a$. Напоминаем, что наименьшим общим кратным нескольких натуральных чисел называется наименьшее натуральное число, делящееся нацело на каждое из этих чисел.

7.5. Найти наименьшее N такое, что на доске 8 на 8 можно расположить N квадратов 2 на 2 клетки так, чтобы больше нельзя было добавить ни одного такого же квадрата, чтобы он не пересекался ни с одним из уже положенных. Стороны квадратов 2 на 2 должны идти по линиям доски, квадраты считаются пересекающимися, если они покрывают хотя бы одну общую клетку.

Всесибирская олимпиада школьников 2011-2012 г. по математике
Заключительный этап
8 класс

Время выполнения задания 4 астрономических часа *Каждая задача оценивается в 7 баллов*

8.1. Андрей вышел из пункта А в 10 часов 18 минут и, двигаясь с постоянной скоростью, пришёл в пункт Б в 13 часов 30 минут. В тот же день Борис вышел из Б в 9 часов 00 минут и, идя по той же дороге с постоянной скоростью, пришёл в А в 11 часов 40 минут. Дорога пересекает реку, Андрей и Борис одновременно подошли к мосту через эту реку, каждый со своей стороны. Андрей ушёл с моста на одну минуту позже Бориса. Когда они подошли к мосту?

8.2. Расположите в ряд натуральные числа от 1 до 11 в некотором порядке так, чтобы после сложения каждого числа с его порядковым номером (считая слева направо) и перемножения полученных одиннадцати чисел получился куб натурального числа.

8.3. Можно ли разрезать квадрат на 1000-угольник и 199 пятиугольников? При этом считается, что никакие две соседние стороны никакого из многоугольников разбиения не лежат на одной прямой. Многоугольники могут быть выпуклыми или невыпуклыми.

8.4. Найдите величины углов треугольника *ABC,* в котором *AB=BC,* а высота *BH* вдвое короче биссектрисы *AK*.

8.5. Найти наименьшее N такое, что на доске 8 на 8 можно расположить N квадратов 2 на 2 клетки так, чтобы больше нельзя было добавить ни одного такого же квадрата, чтобы он

не пересекался ни с одним из уже положенных. Стороны квадратов 2 на 2 должны идти по линиям доски, квадраты считаются пересекающимися, если они покрывают хотя бы одну общую клетку.

Всесибирская олимпиада школьников 2011-2012 г. по математике
Заключительный этап
9 класс

Время выполнения задания 4 астрономических часа *Каждая задача оценивается в 7 баллов*

9.1. Андрей вышел из пункта А в 10 часов 18 минут и, двигаясь с постоянной скоростью, пришёл в пункт Б в 13 часов 30 минут. В тот же день Борис вышел из Б в 9 часов 00 минут и, идя по той же дороге с постоянной скоростью, пришёл в А в 11 часов 40 минут. Дорога пересекает реку, Андрей и Борис одновременно подошли к мосту через эту реку, каждый со своей стороны. Андрей ушёл с моста на одну минуту позже Бориса. Когда они подошли к мосту?

9.2. Можно ли записать в каждой вершине куба одно из чисел 1, 2,…,8 так, чтобы суммы чисел в вершинах каждой грани были одинаковы?

9.3. Прямая, касающаяся описанной окружности треугольника ABC в точке A, пересекается с прямой BC в точке K. На прямой BC от точки K в сторону точек B и C отложен отрезок KM, длина которого равна длине AK. Доказать, что AM является биссектрисой угла BAC.

9.4. Найти наименьшее N такое, что на доске 8 на 8 можно расположить N квадратов 2 на 2 клетки так, чтобы больше нельзя было добавить ни одного такого же квадрата, чтобы он не пересекался ни с одним из уже положенных. Стороны квадратов 2 на 2 должны идти по линиям доски, квадраты считаются пересекающимися, если они покрывают хотя бы одну общую клетку.

9.5. Сто гирь, масса каждой из которых – натуральное число граммов, разложены на 7 равных по массе кучек. Докажите, что можно не менее, чем 7 различными способами убрать одну из гирь так, чтобы оставшиеся 99 гирь уже нельзя было разложить на 7 равных по массе кучек.

Всесибирская олимпиада школьников 2011-2012 г. по математике
Заключительный этап
10 класс

Время выполнения задания 4 астрономических часа *Каждая задача оценивается в 7 баллов*

10.1. Решить систему уравнений: $\begin{cases} x^3 = 2x + y, \\ y^3 = x + 2y. \end{cases}$

10.2. Пусть $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ – натуральные числа. Доказать, что наименьшее общее кратное этих чисел не меньше, чем na_1.

10.3. Можно ли соединить вершины куба восемью отрезками так, чтобы они образовали замкнутую восьмизвенную ломаную, были попарно не параллельны, и пересекались только в вершинах?

10.4. В угол с вершиной O вписана окружность, касающаяся его сторон в точках A и B соответственно. Из точки A параллельно OB проведена прямая, вторично пересекающая окружность в точке C, а отрезок OC вторично пересекает окружность в точке E. Пусть прямая AE пересекает отрезок OB в точке K. Доказать, что K – середина OB.

10.5. В клетках таблицы 7 на 7 расставлены числа 0, 1 и –1 так, что в каждом квадрате 3 на 3 сумма чисел равна 0. Найти наибольшее возможное значение суммы всех чисел таблицы.

Всесибирская олимпиада школьников 2011-2012 г. по математике
Заключительный этап
11 класс

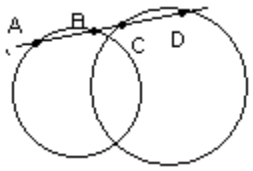
Время выполнения задания 4 астрономических часа *Каждая задача оценивается в 7 баллов*

11.1. Из пункта Б в сторону, противоположную пункту А, выходит пешеход. В то же самое время из пункта А в направлении к Б выезжает автомобиль и догоняет пешехода через 20 минут. Если бы скорость автомобиля была на 30% выше, то он догнал бы пешехода через 15 минут. На сколько процентов ниже исходной должна быть скорость автомобиля, чтобы он догнал пешехода за 25 минут?

11.2. При каких значениях параметров a и b уравнение $||x-1|-2|=ax+b$ имеет ровно три решения? Изобразите множество этих значений на координатной плоскости с осями a и b.

11.3. Все вершины куба в некотором порядке занумерованы числами от 1 до 8 включительно. Доказать, что найдутся два разных ребра, суммы номеров концов которых равны.

11.4. Даны две пересекающиеся окружности радиусов $\sqrt{2}$ см и $\sqrt{17}$ см, расстояние между центрами которых равно 5 см. Прямая пересекает эти окружности в точках A,B,C и D так, как это показано на рисунке, причём длины отрезков AB,BC и CD равны. Найти длину этих отрезков.



11.5. Найти все решения в натуральных числах уравнения: $12\cdot x!+2\cdot y!=z!$. Здесь $n!$ обозначает произведение всех натуральных чисел от 1 до n включительно.

11.6. Доказать, что каждую правильную дробь $\frac{a}{b}$, где $a<b$ - натуральные числа, можно представить в виде суммы дробей $\frac{1}{x_1}+...+\frac{1}{x_n}$ с различными натуральными знаменателями $x_1,...,x_n$.