Решения и критерии проверки заданий Второго (заочного) этапа

Всесибирской открытой олимпиады школьников по математике 2014-15 г.г.

7 класс

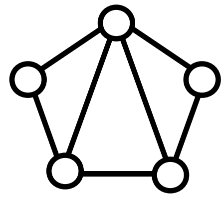
Каждая задача оценивается в 7 баллов

7.1. В булочной есть пирожки с двумя начинками (яблочной и вишнёвой) и двух видов (жареные и печёные). Докажите, что можно купить два пирожка, которые будут отличаться и начинкой, и по способу приготовления.

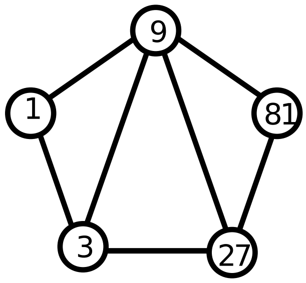
Решение: у нас есть всего 4 вида пирожков: жареный с вишней, жареный с яблоком, печёный с вишней, печёный с яблоком, которые разбиваются на две пары, отличающихся друг от друга обоими свойствами. Если у нас есть в продаже хотя бы три вида, то два точно противоположны, их и покупаем. Если в продаже 2 “непротивоположных” вида или всего один вид, то легко понять, что тогда нет пирожка с каким-то свойством, значит, такого быть не может.

Критерии: при решение перебором пропуск одного случая — не больше 5 баллов; пропуск большего числа случаев — не больше 3 баллов; рассмотрение одного случая — 0 баллов.

7.2. Аня нарисовала картинку: круги, некоторые из которых соединены между собой (см. рис.). Пришёл Гриша и расставил в кругах натуральные числа. Аня заметила, что отношение любых двух чисел, стоящих в соединенных кругах, равно либо 3, либо 9. А Гриша сказал, что отношение любых двух чисел, стоящих в несоединенных кругах, не равно ни 3, ни 9. Приведите пример такой расстановки.



Решение: например, так:



Критерий: возможны другие расстановки!

7.3. Разносторонний треугольник поделён на две части некоторой прямой. Докажите, что эти части не могут быть равными фигурами.

Решение: понятно, что имеет смысл рассматривать только случай, когда прямая делит треугольник на два других треугольника. Пусть треугольник ABC делится отрезком AD на два равных треугольника ABD и ADC.

Если в этих треугольниках угол B равен углу C, как соответствующие равные элементы, то треугольник ABC равнобедренный — противоречие.

Если в этих треугольниках $\angle B = \angle DAC$, то $AD = DC$, то треугольник ADC равнобедренный, следовательно, $\angle C = \angle DAC = \angle B$ — опять противоречие.

Если в этих треугольниках $\angle B = \angle ADC$, то $AD = AC$, то треугольник ADC равнобедренный, следовательно, $\angle C = \angle DAC = \angle B$ — снова противоречие.

Критерии: доказано только то, что случай с 4-угольником лишний — 1 балл; сразу рассматриваются только треугольники, ничего не сказано про другие случаи — снять 1 балл; за каждый потерянный случай снимать 2 балла (например, если сразу утверждается, что если треугольники равны, то $B = C$, т.к. AD — общая сторона).

7.4. Две девочки вяжут с постоянными, но разными скоростями. При этом первая девочка уходит пить чай каждые 5 минут, а вторая — каждые 7 минут. Если девочка ушла пить чай, то она потратит на это ровно 1 минуту. Когда девочки в очередной раз пошли пить чай вместе, оказалось, что связали они одинаково много. На сколько процентов производительность первой девочки выше, если начали вязать они одновременно?

Решение: производственный цикл у первой девочки (повязать + попить чай) составляет 6 минут, у второй — 8. Так как они вернулись с перерыва одновременно, то время работы до конца перерыва составило $6n = 8m$, т.е. $24k$ минут. Первая девочка работала времени, т.е. $20k$ минут. Вторая работала $\frac{7}{8}$ времени, т.е. $21k$ минут. Связали они одинаково много, значит, производительность первой $1/20k$, второй $1/21k$. Следовательно, производительность первой больше на 5% ($1/20k : 1/21k \cdot 100\% = 21/20 \cdot 100\% = 105\%$).

Критерий: предполагается, что девочки вместе ходили пить чай конкретное число раз (например, один) — снять 1 балл; найдены производительности, но не найдены проценты — снять 1 балл.

7.5. В городе 9 остановок и несколько автобусов. Любые два автобуса имеют не более одной общей остановки. У каждого автобуса ровно три остановки. Какое максимальное число автобусов может быть в городе?

Ответ: 12.

Решение: если какая-то остановка общая для 5 маршрутов, то никакие два из них больше не имеют общих остановок, а значит остановок хотя бы $1+5 \cdot 2=11$, что противоречит условию. Значит, каждая остановка — пересечение не более 4 маршрутов, тогда всего остановок автобусы делают не более $9 \cdot 4$, а так как на каждом маршруте 3 автобуса, то всего автобусов не боле $9 \cdot 4/3=12$.

Автобусы по городу могут ходить, например, так (остановки обозначены номерами):
(1, 2, 3), (4, 5, 6), (7, 8, 9),
(1, 4, 7), (2, 5, 8), (3, 6, 9),
(1, 5, 9), (2, 6, 7), (3, 4, 8),
(3, 5, 7), (2, 4, 9), (1, 6, 8).

Критерий: только пример — 3 балла; только оценка, что больше 12 быть не может — 3 балла; только замечание, что одна остановка не может быть больше чем в 4 маршрутах — 1 балл; только ответ — 0 баллов.

8 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

8.1. Два горных козлика Геннадий и Николай устроили соревнование. Геннадий делает два прыжка по 6 метров за то же время, за которое Николай делает 3 прыжка по 4 метра. Козлики договорились скакать вдоль прямой, повернуть не раньше чем через 2 километра и вернуться обратно. Кто быстрее преодолеет этот путь?

Ответ: Николай.

Решение: оба козлика преодолевают 12 метров за одно и то же время, но один из них делает прыжки по 6, а другой по 4 метра. В одну сторону им нужно проскакать не менее 2000

метров, Николай может проскакать ровно 2000 метров, а Геннадий нет (2000 не делится на 6), значит, ему придется проскакать хотя бы 2004 метра в одну сторону. Так как скорости у козликов одинаковые, а путь Геннадия длиннее, то выиграет Николай.
Критерий: только ответ — 0 баллов.

8.2. В квадрате 3 на 3 расставьте девять подряд идущих целых чисел, так чтобы числа, стоящие в клетках, соседних по стороне и диагонали, не имели бы общих делителей, отличных от 1.
Решение: например, так:

8	9	10
5	7	11
6	13	12

Критерии: любая правильно заполненная таблица без объяснений — 7 баллов.

8.3. Аня нарисовала квадрат *ABCD*. Затем она построила равносторонний треугольник *ABM* так, что вершина *M* оказалась внутри квадрата. Диагональ *AC* пересекает треугольник в точке *K*. Докажите, что *CK* = *CM*.
Решение: найдём углы $\angle CKM$ и $\angle CMK$, если они окажутся равны, то треугольник равнобедренный.

$$\angle CKM = 180° - \angle BKC = 180° - (180° - \angle BCK - \angle CBK) =$$

$$= \angle BCK + \angle CBK = 45° + (90° - 60°) = 75°.$$

Так как *BM* = *BA* = *BC*, то есть треугольник *BCM* равнобедренный, то

$$\angle CMK = \angle CMB = \angle BCM = (180° - \angle CBM)/2 = (180° - (90° - 60°))/2 = 150°/2 = 75°.$$

Итак, $\angle CKM = \angle CMK$, значит, *CK* = *CM*.

8.4. Пусть p — нечётное простое число. Докажите, что для некоторой пары различных натуральных чисел m и n имеет место равенство $2/p = 1/n + 1/m$, причем такая пара чисел единственна (с точностью до перестановки n и m).
Решение: умножим уравнение на $2nmp$, получим $4nm = 2mp + 2np$. Перенесём всё в левую часть, прибавим к обеим частям p^2 и сгруппируем слагаемые в левой части, получим $(2n - p)(2m - p) = p^2$. Так как n и m различны, то $(2n - p)$ и $(2m - p)$ различны, и без ограничения общности $2n - p = 1$, $2m - p = p^2$. Выражаем отсюда $n = (1 + p)/2$, $m = p(p + 1)/2$, так как p нечетное, то $p + 1$ делится на 2 и числа m и n будут целыми. Следовательно, n и m нашлись в явном виде, т.е. они существуют и единственны.
Критерии: разобраны только частные случаи — 0 баллов; не доказана единственность (просто подобраны m и n) — максимум 3 балла.

8.5. В городе 9 остановок и несколько автобусов. Любые два автобуса имеют не более одной общей остановки. У каждого автобуса ровно три остановки. Какое максимальное число автобусов может быть в городе?
Ответ: 12.
Решение: если какая-то остановка общая для 5 маршрутов, то никакие два из них больше не имеют общих остановок, а значит остановок хотя бы $1+5\cdot 2=11$, что противоречит условию. Значит, каждая остановка — пересечение не более 4 маршрутов, тогда всего остановок автобусы делают не более $9\cdot 4$, а так как на каждом маршруте 3 автобуса, то всего автобусов

не боле 9·4/3=12.

Автобусы по городу могут ходить, например, так (остановки обозначены номерами):
(1, 2, 3), (4, 5, 6), (7, 8, 9),
(1, 4, 7), (2, 5, 8), (3, 6, 9),
(1, 5, 9), (2, 6, 7), (3, 4, 8),
(3, 5, 7), (2, 4, 9), (1, 6, 8).
Критерий: только пример — 3 балла; только оценка, что больше 12 быть не может — 3 балла; только замечание, что одна остановка не может быть больше чем в 4 маршрутах — 1 балл; только ответ — 0 баллов.

9 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

9.1. Электронные часы на здании вокзала показывают часы и минуты текущего момента времени в формате ЧЧ:ММ от 00:00 до 23:59. Сколько времени в течение одних суток на часах будут гореть четыре различных цифры?
Ответ. 10 часов 44 минуты.
Решение. Каждая возможная комбинация четырёх цифр горит на часах одну минуту. Рассмотрим отдельно время суток от 00:00 до 19:59 и от 20:00 до 23:59. В первом случае допустимых по условию задачи комбинаций будет: 2 (цифра десятков часов на первой позиции), умножить на 5 (цифра десятков минут на третьей позиции, кроме той, что уже горит на первой позиции), умножить на 8 (цифра единиц часов, не равная цифрам на 1-ой и 3-ей позициях) и умножить на 7 (цифра единиц минут на четвёртой позиции, не равная цифрам на 1-ой, 2-ой и 3-ей позициях). Получается 560 комбинаций, горящих 560 минут, то есть 9 часов 20 минут в сутки.
Во втором случае допустимых по условию задачи комбинаций будет: 1 (цифра десятков часов на первой позиции, равная 2), умножить на 3 (цифра единиц часов на второй позиции, не равная 2), умножить на 4 (цифра десятков минут на третьей позиции, кроме тех, что уже горят на 1-ой и 2-ой позициях) и умножить на 7 (цифра единиц минут на четвёртой позиции, не равная цифрам на 1-ой, 2-ой и 3-ей позициях). Получается 84 комбинации, горящих 84 минуты, то есть 1 час 24 минуты в сутки. Вместе получаем 10 часов 44 минуты.
Критерии оценивания.
Идея разбиения рассмотрения на случаи время суток от 00:00 до 19:59 и от 20:00 до 23:59: 2 балла.
Идея подсчёта числа вариантов по цифрам в удобном порядке следования позиций: 3 балла.
Сам правильный подсчёт после этого: 2 балла.

9.2. Найти в произвольном треугольнике *ABC* точку *M* такую, что если построить на отрезках *MA, MB* и *MC,* как на диаметрах, окружности, то длины их попарно общих хорд будут равны.
Ответ. Искомой будет точка пересечения биссектрис, она же — центр вписанной окружности треугольника.
Решение. Обозначим вторые точки пересечения окружностей, построенных на отрезках *MA* и *MB* через *P* , на отрезках *MB* и *MC* — через *Q,* на отрезках *MC* и *MA* — через *R.* Поскольку углы *APM* и *BPM* , опирающиеся на диаметры *MA* и *MB* соответствующих окружностей, прямые, угол *APB,* равный их сумме, развёрнутый, поэтому *P* лежит на стороне *AB* и является основанием перпендикуляра из *M* на *AB.* Аналогично, *Q* — основание перпендикуляра из *M* на *BC,* и *R* - основание перпендикуляра из *M* на *CA.* Следовательно, *M* равноудалена от сторон треугольника и является центром его вписанной окружности.
Критерии оценивания. Только ответ с проверкой: 2 балла.
Доказательство того, что общая хорда является перпендикуляром к соответствующей стороне: 5 баллов.

9.3. В выпуклом четырёхугольнике точки P,Q,R,S являются серединами сторон AB,BC,CD,DA соответственно, а K,L,M,N - точки пересечения отрезков AQ и DP, AQ и BR, CS и BR, CS и DP соответственно. Докажите, что площадь четырёхугольника $KLMN$ равна сумме площадей треугольников AKP, BLQ, CMR и DNS.

Доказательство. Заметим, что площадь треугольника AQC равна половине площади треугольника ABC, а площадь треугольника ASC равна половине площади треугольника ADC, следовательно, площадь четырехугольника $AQCS$ половине площади четырёхугольника $ABCD$. Аналогично, сумма площадей треугольников ADP и BCR равна половине площади четырёхугольника $ABCD$. Выкидываем общие для четырехугольника $AQCS$ и объединения треугольников ADP *и* BCR четырехугольники $AKNS$ и $CMLQ$, получим равенство площади четырёхугольника $KLMN$ и суммы площадей треугольников AKP, BLQ, CMR и DNS.

Критерии оценивания. Замечание, что площадь треугольника AQC равна половине площади треугольника ABC, а площадь треугольника ASC равна половине площади треугольника ADC: 1 балл.

Доказательство того, что площадь четырехугольника $AQCS$ половине площади четырёхугольника $ABCD$: 2 балла.

Доказательство того, что сумма площадей треугольников ADP и BCR равна половине площади четырёхугольника $ABCD$: 2 балла.

Выкидывание общих для четырехугольника $AQCS$ и объединения треугольников ADP *и* BCR четырехугольников $AKNS$ и $CMLQ$: 2 балла.

9.4. Сумма всех восьми чисел $a_{1,} a_{2,} \dots, a_8$ равна $\frac{4}{3}$, а сумма любых семи из них положительна. Найти все значения, которые может принимать наименьшее из этих чисел.

Ответ. $-8 < a_1 \le \frac{1}{6}$ **,** считая a_1 наименьшим.

Решение. Считаем, что $a_1 \le a_2 \le \dots \le a_8$ и ищем область значений a_1. Ясно, что $a_1 \le \frac{1}{6}$, в противном случае сумма всех восьми чисел $a_1, a_2, \dots, a_8$ была бы больше $\frac{1}{6} \cdot 8 = \frac{4}{3}$. Далее, ввиду того, что сумма $a_{1,} a_{2,} \dots, a_7$ положительна, $a_8 < \frac{4}{3}$, значит, и остальные числа меньше $\frac{4}{3}$. Из положительности суммы $a_{1,} a_{2,} \dots, a_7$ теперь следует, что $a_1 > -6 \cdot \frac{4}{3} = -8$. Следовательно, $-8 < a_1 \le \frac{1}{6}$. Осталось доказать, что a_1 может принимать любое значение c из этого интервала. Положим $a_1 = c$, $a_2 = a_3 = \dots = a_8 = \frac{4}{21} - \frac{c}{7}$. Нужно убедиться, что

1) $a_1 + \dots + a_8 = c + 7 \cdot \left(\frac{4}{21} - \frac{c}{7} \right) = \frac{4}{3}$ - верно.

2) $a_1 = c \le \frac{4}{21} - \frac{c}{7} = \frac{4}{3} = a_2 = \dots = a_8$ равносильно $c \le \frac{1}{6}$ - верно.

3) $a_1 + \dots + a_7 = c + 6 \cdot \left(\frac{4}{21} - \frac{c}{7} \right) = \frac{c+8}{7} > 0$ - верно. Следовательно, сумма любых семи из этих чисел положительна.

Критерии оценивания. Оценка $a_1 \le \frac{1}{6}$: 1 балл.

Оценка $a_8 < \frac{4}{3}$ и остальные числа меньше $\frac{4}{3}$: 1 балл

Оценка $a_1 > -6 \cdot \frac{4}{3} = -8$: 2 балла.

Построение примера для всех a_1 из найденного интервала с аккуратным доказательством : 3 балла (по баллу каждый пункт).

9.5. Найти все натуральные n такие, что из палочек длин $1,2,\ldots,n$ (все числа от 1 до n по одному разу) можно сложить равносторонний треугольник. При этом должны быть использованы все палочки.
Ответ. Все натуральные $n\geq 5$, остатки которых при делении на 6 равны 0,2,3 или 5.
Решение. Сумма длин всех палочек, равная $\frac{n(n+1)}{2}$, должна делиться на 3, поэтому произведение $n(n+1)$ должно делиться на 6, с учётом взаимной простоты сомножителей получаем, что один из них делится на 2, и один (возможно, тот же) — на 3. Перебрав четыре возможных варианта и заметив, что $n\leq 4$ нам не подходят, получаем n, указанные в ответе. Покажем, что для каждого из них требуемое в условии построение возможно. Заметим, что шесть произвольных последовательных чисел $k,k+1,k+2,k+3,k+4,k+5$ можно разбить на три пары чисел с одинаковой суммой: $\{k,k+5\},\{k+1,k+4\},\{k+2,k+3\}$. Следовательно, если мы покажем, как сложить правильный треугольник для $n=5,6,8,9$, то, добавляя необходимое количество последовательных шестёрок чисел к этим числам и соответствующее количество пар палочек к каждой стороне правильного треугольника, получим способ сложения правильного треугольника для всех указанных в ответе n.
При $n=5,6,8,9$ задача решается так: 1) $n=5,1+4=2+3=5$, 2) $n=6,1+6=2+5=3+4$, 3) $n=8,1+2+3+6=4+8=5+7$, 4) $n=9,1+2+3+4+5=6+9=7+8$.
Критерии оценивания. Из соображений делимости на 3 найдены искомые варианты для n по модулю 6: 2 балла.
Доказательство $n\geq 5$: 1 балл.
Построение примеров. Идея шестёрок: 3 балла. Примеры для $n=5,6,8,9$: 1 балл.

10 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

10.1. Площадь четырёхугольника, образованного серединами оснований и диагоналей трапеции, в четыре раза меньше, чем площадь самой трапеции. Найти отношение длин оснований трапеции.
Ответ. 3 : 1.
Решение. Обозначим вершины трапеции за *A,B,C,D*, середины оснований *AD* и *BC* за *K* и *M,* середины боковых сторон *AB* и *CD* за *P* и *Q* соответственно. Пусть длины *AD* и *BC* равны *a* и *b,* причём *a>b.* По теореме Фалеса, средняя линия *PQ* пересекает диагонали *AC* и *BD* в их серединах *L* и *N.* Тогда *LQ* и *NQ* являются средними линиями в треугольниках *ACD* и *BCD*, поэтому $LN=LQ-NQ=\frac{a}{2}-\frac{b}{2}=\frac{a-b}{2}$. Если высота трапеции равна *h,* то перпендикуляры из точек *K* и *M* на среднюю линию *PQ* равны $\frac{h}{2}$ и площадь четырёхугольника *KLMN*, образованного серединами оснований и диагоналей трапеции, равна $\frac{1}{2}\cdot h\cdot\frac{a-b}{2}=h\frac{(a-b)}{4}$. Площадь трапеции равна $h\frac{(a+b)}{2}$, откуда $\frac{a-b}{2(a+b)}=\frac{1}{4}$ и $a=3b$
Критерии оценивания. Доказательство того, что длина *LN* равна полуразности оснований: 2 балла.
Подсчёт площади четырёхугольника *KLMN*: 3 балла.
Завершение подсчёта: 2 балла.

10.2. Пусть x_1 - корень квадратного трёхчлена $y=x^2+ax+b$, а x_2 - корень квадратного трёхчлена $y=x^2-ax-b$, причём $x_1\neq x_2$ и оба корня не равны нулю. Докажите, что между

x_1 и x_2 обязательно лежит корень квадратного трёхчлена $y=x^2+2ax+2b$.
Доказательство. Обозначим $f(x)=x^2+ax+b$, $g(x)=x^2-ax-b$ и $h(x)=x^2+2ax+2b$. Тогда $h(x_1)=x_1^2+2ax_1+2b=ax_1+b=-x_1^2<0$ и $h(x_2)=x_2^2+2ax_2+2b=3ax_2+3b=3x_2^2>0$. По теореме Больцано-Коши, непрерывная функция $h(x)=x^2+2ax+2b$, принимающая на концах интервала $[x_1,x_2]$ значения разных знаков, обращается в ноль в некоторой внутренней точке этого интервала, являющейся, таким образом, корнем многочлена
Критерии оценивания. Доказательство того, что функция $h(x)=x^2+2ax+2b$, принимает на концах интервала $[x_1,x_2]$ значения разных знаков: 4 балла.
Применение теоремы Больцано-Коши: 3 балла.

10.3. Сумма всех восьми чисел $a_1,a_2,\dots,a_8$ равна $\frac{4}{3}$, а сумма любых семи из них положительна. Найти все значения, которые может принимать наименьшее из этих чисел.
Ответ. $-8<a_1\le\frac{1}{6}$

Решение. Считаем, что $a_1\le a_2\le\ldots\le a_8$ и ищем область значений a_1 . Ясно, что $a_1\le\frac{1}{6}$, в противном случае сумма всех восьми чисел $a_1,a_2,\dots,a_8$ была бы больше $\frac{1}{6}\cdot 8=\frac{4}{3}$. Далее, ввиду того, что сумма $a_1,a_2,\dots,a_7$ положительна, $a_8<\frac{4}{3}$, значит, и остальные числа меньше $\frac{4}{3}$. Из положительности суммы $a_1,a_2,\dots,a_7$ теперь следует, что $a_1>-6\cdot\frac{4}{3}=-8$. Следовательно, $-8<a_1\le\frac{1}{6}$. Осталось доказать, что a_1 может принимать любое значение c из этого интервала. Положим $a_1=c$, $a_2=a_3=\ldots=a_8=\frac{4}{21}-\frac{c}{7}$. Нужно убедиться, что

1) $a_1+\ldots+a_8=c+7\cdot\left(\frac{4}{21}-\frac{c}{7}\right)=\frac{4}{3}$ - верно.

2) $a_1=c\le\frac{4}{21}-\frac{c}{7}=\frac{4}{3}=a_2=\ldots=a_8$ равносильно $c\le\frac{1}{6}$ - верно.

3) $a_1+\ldots+a_7=c+6\cdot\left(\frac{4}{21}-\frac{c}{7}\right)=\frac{c+8}{7}>0$ - верно. Следовательно, сумма любых семи из этих чисел положительна:

Критерии оценивания. Оценка $a_1\le\frac{1}{6}$: 1 балл.

Оценка $a_8<\frac{4}{3}$ и остальные числа меньше $\frac{4}{3}$: 1 балл

Оценка $a_1>-6\cdot\frac{4}{3}=-8$: 2 балла.

Построение примера для всех a_1 из найденного интервала с аккуратным доказательством доказательством: 3 балла (по баллу каждый пункт).

10.4. Докажите, что в произвольном остроугольном треугольнике *ABC* существует точка *M* такая, что углы *MAB*, *MBC* и *MCA* равны.
Доказательство. 1. Если обозначить углы *MAB*, *MBC* и *MCA* за x , то углы *MBA*, *MCB* и *MAC* равны, соответственно, $B-x$, $C-x$ и $A-x$. Отсюда следует, что условие задачи эквивалентно тому, что углы *AMB*, *BMC* и С*MA* равны соответственно, *180-B,180-C* и *180-A*.
2. Заметим, что углы между продолжениями сторон треугольника *CB, AC, BA* и сторонами *BA, CB, CA* соответственно равны как раз *180-B,180-C* и *180-A.* По теореме о равенстве угла между касательной и хордой и угла, опирающегося на хорду, последнее равносильно тому,

что описанные окружности треугольников *AMB*, *BMC* и *CMA* касаются продолжений сторон треугольника *CB, AC* и *BA* соответственно.
3. Следовательно, если построить окружности, касающиеся продолжений сторон треугольника *CB, AC* и *BA* и проходящие через вершины *A,B* и *C* соответственно, то их общая точка, если она существует, будет искомой точкой *M* .
4. Окружности строятся так: центр окружности, проходящей через точки *A* и С и касающейся *BA* является пересечением перпендикуляра к *BA* в точке *A* и серединного перпендикуляра к *AC.* Остальные аналогично.
5. Считаем *ABC* самым большим углом треугольника. Обозначим за *M* точку пересечения окружностей, касающихся продолжений сторон треугольника *CB, AC* и проходящих через вершины *A,B.* Вторая окружность образует со стороной *BC* в точках *B* и *C* углы, равные *C*, поэтому её дуга между *B* и *C* полностью лежит внутри треугольника *ABC*. Первая окружность касается стороны *BC* в точке B, поэтому её дуга *BA* начинается внутри части треугольника *ABC*, ограниченной стороной *BC* и дугой *BC* второй окружности, а заканчивается вне этой части в вершине *A*. Следовательно, первая и вторая окружности пересекаются на деге *AB* второй окружности в точке *M* внутри треугольника. Тогда величина угла CMA равна 360 минус сумма величин углов *AMB* и *BMC,* то есть *360 — (180-B)-(180-C)=B+C=180-A.* Значит, точка *M* лежит и на третьей окружности и является искомой.
Критерии оценивания. Замечено, что условие задачи эквивалентно тому, что углы *AMB*, *BMC* и *CMA* равны соответственно, *180-B,180-C* и *180-A* : 2 балла.
Идея трёх нужных окружностей: 2 балла.
Построение окружностей: 1 балл.
Доказательство того, что общая точка трёх окружностей лежит внутри треугольника: 2 балла.

10.5. Найдите все пары натуральных чисел a и b такие, что $\frac{a^2+b}{b^2-a}$ и $\frac{b^2+a}{a^2-b}$ - целые числа.

Ответ. $(a,b)=(1,2),(2,1),(2,2),(2,3),(3,2),(3,3)$

Решение. Не умаляя общности, считаем $b\geq a$. Тогда $b^2\geq b\geq a$, исключая случай $b^2=a,b=a=1$, имеем $\frac{a^2+b}{b^2-a}>0$, откуда $\frac{a^2+b}{b^2-a}\geq 1$. Из последнего неравенства $b-a\leq 1$, следовательно, в рассматриваемом нами случае либо $b=a$, либо $b=a+1$.

1) $b=a$. Тогда $\frac{a^2+a}{a^2-a}=\frac{a+1}{a-1}=1+\frac{2}{a-1}$ -целое, значит, $a-1$ делит 2, откуда $a=2,3$. Найденные пары $(a,b)=(2,2),(3,3)$ удовлетворяют и второму соотношению.

2) $b=a+1$. Тогда $\frac{a^2+b}{b^2-a}=\frac{a^2+a+1}{a^2+a+1}=1$ - выполнено для всех a . Подставляем $b=a+1$ во второе выражение, $\frac{b^2+a}{a^2-b}=\frac{a^2+3a+1}{a^2-a-1}=1+\frac{4a+2}{a^2-a-1}$. Из последней дроби $4a+2\geq a^2-a-1$, то есть $a^2-5a-3\leq 0$, откуда, решая квадратное неравенство, $a\leq\frac{5+\sqrt{37}}{2}$, то есть $a=1,2,3,4,5$. Проверяем их подстановкой в выражение, получаем $a=1,2$. Заметим, что при $a=1$ выражение отрицательно, что допускается условием.
При записи ответа нужно добавить симметричные пары решений, когда $b\leq a$.
Критерии оценивания. Потеря симметричных решений: минус 1 балл.
Получение $b=a$, либо $b=a+1$: 2 балла.
Рассмотрение случая $b=a$: 2 балла.
Рассмотрение случая $b=a+1$: 3 балла.

11 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

11.1. Найти все решения в натуральных числах уравнения: $x!+9=y^3$ **.**

Ответ. $x=6, y=9$

Решение. Если $x\geq 9$ то $x!$ делится на 27, $x!+9$ делится на 9 и не делится на 27. Тогда y^3 делится на 3, значит, y делится на 3 и y^3 делится на 27 — противоречие. Следовательно, $x\leq 8$. Перебор значений $x=1,2,3,\ldots,8$ даёт единственное решение $x=6, y=9$.

Критерии оценивания. Только ответ с проверкой: 1 балл.

Использование делимости на 3 и оценка $x\leq 8$: 5 баллов.

Проверка значений $x=1,2,3,\ldots,8$: 2 балла.

11.2. Найти количество различных способов расстановки всех натуральных чисел от 1 до 9 включительно по одному в клетки таблицы размера 3 на 3 таких, что суммы чисел в каждой строке и каждом столбце равны. Таблицу нельзя поворачивать или отражать.

Ответ. 72 способа.

Решение. Среди чисел от 1 до 9 всего 5 нечётных, поскольку суммы во всех строках и столбцах, равные $\frac{1}{3}(1+2+\ldots+9)=15$ - нечётны, то в каждой строке и каждом столбце стоит нечётное количество нечётных чисел. Это возможно только, если в одной строке стоят три нечётных числа, а в остальных по одному, и в одном столбце стоят три нечётных числа, а в остальных по одному. Следовательно, все нечётные числа стоят в объединении некоторой строки и некоторого столбца. На пересечении этих строки и столбца записано число $15+15-(1+3+5+7+9)=5$. Кроме того, 7 и 9 не могут стоять в одной строке или столбце. Следовательно, мы можем записать число 5 в некоторую клетку девятью различными способами, потом записать в одну из четырёх клеток того же, что и 5, столбца или строки число 9, а затем в две клетки тех же столбца и строки, не соседние с 9-ой, число 7. Получаем $9\cdot 4\cdot 2=72$ способа. Затем убеждаемся, что на пересечении столбца и строки, содержащих 7 и 9 может располагаться только 2: 6 и 8 не проходят по сумме, а 4 дала бы вместе с 7 ещё одну 4. После этого ясно, что остальные чётные числа можно расставить в оставшиеся клетки таблицы, причём единственным способом.

Критерии оценивания. Замечено, что все нечётные числа стоят в объединении некоторой строки и некоторого столбца: 2 балла.

Доказано, что на пересечении этих строки и столбца записано число 5: 1 балл.

Замечено, что 7 и 9 не могут стоять в одной строке или столбце: 1 балл.

Расположения остальных нечётных цифр 72-мя способами: 2 балла.

Отсутствие точного обоснования, что суммы в строках и столбцах равны 15: снимаем 1 балл.

Расстановки, различающиеся на поворот или отражение, считаются одинаковыми: снимаем 2 балла.

Потеря части решений: снимаем от 2 баллов и больше.

Построены все требуемые расстановки, но не доказано, что нет других: не выше 3 баллов.

11.3. Рассмотрим все графики квадратичных функций вида $y=x^2+px+q$, пересекающие оси координат в трёх различных точках, и окружности, проходящие через эти три точки. Доказать, что все эти окружности проходят через одну общую точку.

Доказательство. Обозначим через x_1 и x_2 корни многочлена x^2+px+q , по условию они различны и не равны нулю. По теореме Виета, их произведение равно q , оно положительно, если x_1 и x_2 одного знака, и отрицательно — если разных. Рассмотрим отрезок, соединяющий корни, как хорду в окружности, проходящей через три точки пересечения графика данного трёхчлена с координатными осями, сам или продолжение которого проходит через точку O — начало координат. Третий раз график трёхчлена пересекает координатную ось OY в точке $Q(0,q)$, по теореме о касательной и секущей, окружность должна пересекать ось OY в точке $S(0,s)$, возможно, совпадающей с Q, такой, что $|qs|=|x_1x_2|=|q|$, откуда модуль s равен 1. Следовательно, если x_1 и x_2 одного знака, они расположены по одну сторону от *O,* также Q и S расположены по одну сторону от *O,* при этом q положительно, следовательно, s положительно и $s=1$. Если же x_1 и x_2 разных знаков, они расположены по разные стороны от *O,* также Q и S расположены по разные стороны от *O,* при этом q отрицательно, а s - положительно, следовательно, снова $s=1$.

Критерии оценивания. Если нет полного разбора знака s в разных случаях: снимаем 2 балла.

11.4. Длины сторон пятиугольника *ABCDE* равны 1. Пусть точки *P,Q,R,S* являются серединами сторон *AB,BC,CD,DE* соответственно, а точки *K* и *L* являются серединами отрезков *PR* и *QS* соответственно. Найти длину отрезка *K L*.

Ответ. $\frac{1}{4}$

Решение 1. Под *XY* в данном решении будем понимать вектор с началом в точке *X* и концом в точке *Y.* Тогда $AK=\frac{1}{2}(AP+AR)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}AB+AB+BC+\frac{1}{2}CD\right)=\frac{3}{4}AB+\frac{1}{2}BC+\frac{1}{4}CD$.

Аналогично, $AL=\frac{1}{2}(AQ+AS)=\frac{1}{2}\left(AB+\frac{1}{2}BC+AB+BC+CD+\frac{1}{2}DE\right)=AB+\frac{3}{4}BC+\frac{1}{2}CD+\frac{1}{4}DE$.

Тогда $KL=AL-AK=\frac{1}{4}(AB+BC+CD+DE)=\frac{1}{4}AE$. Следовательно, отрезок *KL* параллелен отрезку *AE* и длина его равна $\frac{1}{4}$ длины *AE.*

Решение 2. Отметим точку *M* , являющуюся серединой диагонали *BE*. Тогда точки *Q,R,S* и *M* являются серединами сторон четырёхугольника *BCDE* и, по хорошо известному факту являются вершинами параллелограмма (Вариньона для *BCDE*) . Точка *L* является серединой его диагонали *QS,* значит, и серединой его диагонали *RM.* Следовательно, отрезок *KL* – средняя линия в треугольнике *PRM.* С другой стороны, отрезок *RM* — средняя линия в треугольнике *ABE.* Поэтому, длина *KL* равна половине длины *RM,* и четверти длины *AE.* Заметим, что ни выпуклость пятиугольника, ни длины остальных его сторон здесь практически ни при чём.

Критерии оценивания. Есть идея параллелограмма *QRSM:* 3 балла.
Замечено, что отрезок *KL* – средняя линия в треугольнике *PRM: 3* балла.
Замечено, что отрезок *RM* — средняя линия в треугольнике *ABE:* 1 балл.

11.5. Докажите, что для произвольных вещественных чисел *a,b,c,d,e* выполняется неравенство $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2\geq a(b+c+d+e)$.

Доказательство. Перепишем исходное неравенство в виде: $a^2-a(b+c+d+e)+b^2+c^2+d^2+e^2\geq 0$ и будем рассматривать его как квадратичный трёхчлен относительно a с остальными переменными в качестве параметров, который должен быть неотрицательным при всех значениях a . Последнее равносильно неположительности дискриминанта $D=(b+c+d+e)^2-4(b^2+c^2+d^2+e^2)$ данного трёхчлена. Последнее выполнено в силу неравенства о среднем квадратичном и средним арифметическом чисел b,c,d,e . Если не привлекать к делу неравенство о среднем квадратичном и средним арифметическом, то дискриминант можно переписать в виде: $D=2(bc+bd+be+cd+ce+de)-3(b^2+c^2+d^2+e^2)$. Запишем для каждой x,y пары различных букв из b,c,d,e очевидное неравенство $2xy-(x^2+y^2)\leq 0$ и сложив шесть полученных неравенств, получим неравенство $D\leq 0$.

Критерии оценивания. Есть идея положительности дискриминанта квадратного уравнения: 2 балла.