

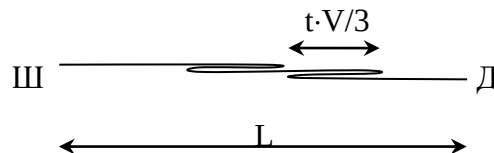
Заключительный этап
Всесибирской Открытой Олимпиады Школьников по физике
13 марта 2022 г.
Задачи 7 класса

Возможные решения (максимум 10 баллов за задачу)

1. Если школьнику по дороге из школы домой никто не позвонит, то он приходит домой в 14-00. Но в один из дней ему начали звонить друзья и каждый раз, когда школьник доставал телефон, у него из кармана выпадал носовой платок и падал на асфальт. Школьник замечал это тогда, когда заканчивался разговор по телефону, разворачивался и шел за платком. Подняв платок, школьник убирал его в тот же карман и продолжал путь домой. И так повторилось несколько раз. *Сколько* всего минут продолжались телефонные разговоры, если из-за них в этот день школьник пришел домой только в 14-16? Известно, что школьник во время телефонного разговора уменьшает скорость своего движения втрое, а все разговоры были короче, чем промежутки между ними.

Решение: Введем обозначения, которые будут использованы при записи соотношений, связывающих разные величины из задачи. Пусть T_x - искомая длительность всех разговоров в минутах, V - скорость движения школьника, когда он не разговаривает по телефону. Еще введем L - расстояние между школой и домом.

Для лучшего понимания происходящего в задаче изобразим траекторию школьника для двух разговоров. Для примера указано, что второй отрезок имеет длину $tV/3$, где t - время разговора по телефону в этот раз. Это значит, что на такое расстояние школьнику приходится возвращаться за платком и обратно в точку, где этот разговор закончился.

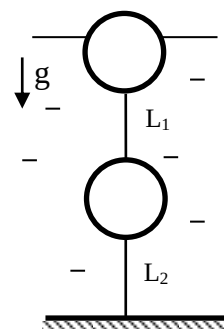


Полное расстояние, которое проходит школьник за все время разговоров - $T_x \cdot V/3$ (+2 балла). Если бы ему не позвонили, то он бы прошел это расстояние за $T_x/3$, т.е. на $2T_x/3$ быстрее (+1 балл). Возвращаясь за платком, школьник прошел лишнее расстояние $2T_x \cdot V/3$ (+1 балл), и потребовалось ему на это время $(2T_x \cdot V/3)/V = 2T_x/3$ (+1 балл). Заметим, что, согласно условию, ему не звонили, пока он не подобрал платок и не прошел точку, в которой прекратился предыдущий разговор.

Таким образом, в рассматриваемый день школьник потратил дополнительное время, равное $2T_x/3 + 2T_x/3 = 4T_x/3 = 16$ мин (+2 балла).

Значит, искомое время разговоров составляет примерно $T_x = 12$ мин (+3 балла за явно сформулированный и корректно полученный ответ).

2. Между двумя одинаковыми поплавками вставляют резинку. Еще одну точно такую же резинку прикрепляют к одному из поплавков с другой стороны и погружают всю конструкцию в жидкость (см. рисунок). При этом верхний поплавок погружен на 75% своего объема. Длина верхней резинки в растянутом состоянии равна L_1 , длина растянутой нижней резинки - L_2 . Из-за маленькой дырочки нижний поплавок полностью заполнился жидкостью, после чего верхний поплавок



погрузился в жидкость целиком. Какова стала теперь длина нижней резинки? Считать, что у поплавков стенки очень тонкие, а внутри - пустота.

Решение:

Введем обозначение V для объема одного поплавка, ρ - для плотности жидкости, L_0 - для длины нерастянутой резинки, L_x - для искомой длины растянутой нижней резинки после полного погружения верхнего поплавка в жидкость.

Так как очень тонкие стенки подразумевают очень малую массу поплавка (плотность любого материала конечна), то условие равновесия верхнего поплавка в начальной ситуации имеет вид

$$\frac{3}{4} \cdot V \cdot \rho \cdot g = k \cdot (L_1 - L_0) \quad (+1 \text{ балл})$$

Условие равновесия нижнего поплавка в начальной ситуации имеет вид

$$V \cdot \rho \cdot g + k \cdot (L_1 - L_0) = k \cdot (L_2 - L_0) \quad (+2 \text{ балла})$$

Из этих двух уравнений получаем, что

$$\frac{3}{4} k \cdot (L_2 - L_1) = k \cdot (L_1 - L_0),$$

$$\text{т.е. } L_0 = \frac{7L_1 - 3L_2}{4} \quad (+2 \text{ балл})$$

После заполнения пустотелого поплавка жидкостью силы натяжения обеих резинок становятся одинаковыми (+1 балл), а условие равновесия верхнего поплавка становится таким:

$$V \cdot \rho \cdot g = k \cdot (L_x - L_0) \quad (+1 \text{ балл})$$

Используя первое уравнение и выражение для L_0 , получаем

$$L_x = \frac{3L_1 + L_2}{4}$$

(+3 балла за явно сформулированный и корректно полученный ответ).

3. Из карьера на фабрику на грузовиках непрерывно возят руду по длинной дороге. После разгрузки пустая машина сразу едет обратно в карьер. Чуть меньше трети всего пути проходит по длинному мосту, который может выдержать вес не более 6 машин с рудой, либо 19 пустых машин. Какое максимальное число грузовиков надо одновременно направить на такие перевозки, чтобы машины не простаивали и на всем пути ехали с постоянной скоростью? Известно, что разрешенная скорость пустого грузовика равна $V_{\text{п}}=60$ км/ч, а груженого - $V_{\text{г}}=36$ км/ч. Считать, что на всём пути встречные машины легко разъезжаются, временем погрузки и разгрузки можно пренебречь, и что в одну сторону всегда едет одно и то же количество машин.

Решение: Введем обозначения, которые будут использованы при записи соотношений, связывающих разные величины из задачи. Пусть L - длина всего пути от фабрики до карьера, N - искомое количество всех машин (очевидно, целое), $N_{\text{п}}$ - число пустых машин, которые едут от фабрики в карьер, $N_{\text{г}}$ - число груженных машин, которые едут обратно, $N_{\text{п}}+N_{\text{г}}=N$. Пусть $M_{\text{п}}$ и $M_{\text{г}}$ - массы пустой и груженой машины, соответственно.

Сначала заметим, что при равномерном темпе работы в любом месте пути количество машин, проехавших за одно и то же время в сторону фабрики, равно числу машин,

проехавших в другую сторону. В противном случае где-то возникнет нехватка или избыток машин (+1 балл).

Такое равенство потоков машин выражается соотношением

$$\frac{L/N_{\Pi}}{V_{\Pi}} = \frac{L/N_{\Gamma}}{V_{\Gamma}}$$

или

$$\frac{N_{\Gamma}}{N_{\Pi}} = \frac{V_{\Pi}}{V_{\Gamma}} = \frac{60}{36} = \frac{5}{3},$$

$$\text{т.е. } N_{\Gamma} = N \cdot \frac{V_{\Pi}}{V_{\Gamma} + V_{\Pi}} = \frac{5}{8} N \quad (+1 \text{ балл})$$

$$N_{\Pi} = N \cdot \frac{V_{\Gamma}}{V_{\Gamma} + V_{\Pi}} = \frac{3}{8} N \quad (+1 \text{ балл})$$

Поскольку мост занимает примерно треть всего пути, по нему едут одновременно не больше $N_{\Pi}/3$ пустых машин и $N_{\Gamma}/3$ груженых машин. Груженная машина весит примерно в $19/6$ раза больше пустой, $19M_{\Pi}/6 = M_{\Gamma}$ (+1 балл), т.е. можно сказать, что общий вес всех машин на мосту не будет больше, чем

$$M_{\Pi} \cdot N_{\Pi}/3 + M_{\Gamma} \cdot N_{\Gamma}/3 = (M_{\Pi} \cdot N_{\Pi} + 19M_{\Pi}/6 \cdot N_{\Pi} \cdot 5/3)/3 = M_{\Pi} \cdot N_{\Pi} (1 + 95/18)/3 \quad (+1 \text{ балл}).$$

Согласно условию задачи, по мосту может ехать ограниченное число машин, т.е.

$$M_{\Pi} \cdot N_{\Pi} (113/54) \leq 19M_{\Pi}, \quad \text{т.е. } N_{\Pi} \leq 9.07 \quad (+1 \text{ балл}).$$

Аналогично можно убедиться, что для числа груженых машин верно соотношение

$$M_{\Pi} \cdot N_{\Pi}/3 + M_{\Gamma} \cdot N_{\Gamma}/3 = (6M_{\Gamma}/19 \cdot 3N_{\Gamma}/5 + M_{\Gamma} \cdot N_{\Gamma})/3 = M_{\Gamma} \cdot N_{\Gamma} (1 + 18/95)/3$$

$$M_{\Gamma} \cdot N_{\Gamma} (113/297) \leq 6M_{\Gamma}, \quad \text{т.е. } N_{\Gamma} \leq 15.7 \quad (+1 \text{ балл}).$$

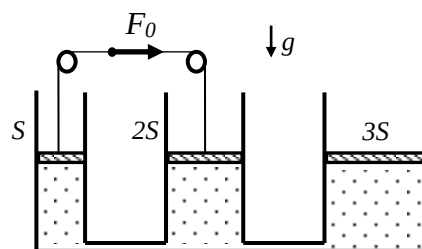
Отсюда следует, что максимальные значения $N_{\Pi}=9$, $N_{\Gamma}=15$,

$N=24$ (+3 балла за явно сформулированный и корректно полученный ответ).

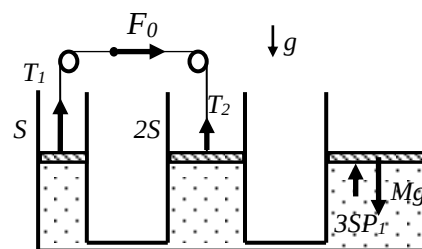
Заметим, что поскольку расстояние между гружеными машинами получается $L/15$ (при условии целого количества машин одного типа), т.е. между 6-ю машинами получается расстояние $5L/15 = L/3$, что чуть длиннее, чем мост, т.е. на мосту может быть только 5 груженых машин. Можно добавить еще 3 пустых (4 пустых весят уже больше одной груженой). Между 4-мя пустыми машинами - расстояние $3L/9 = L/3$, т.е. на мосту не будет больше машин, чем можно.

Если верный ответ получен простым подбором численных значений, то всего ставится 7 баллов. Если формально верный ответ дан, исходя из условия целочисленности N_{Π} и N_{Γ} без проверки на пропускную способность моста, то всего ставится не более 3-х баллов.

4. Имеется три сообщающихся сосуда, в которые налита жидкость с плотностью ρ . Сосуды перекрыты подвижными тяжелыми поршнями с площадью сечения S , $2S$ и $3S$ (см. рисунок). Два меньших поршня соединены нитью, перекинутой через блоки. Все поршни удерживаются в равновесии на одном и том же уровне, когда к этой нити дополнительно приложена внешняя сила, равная F_0 , как показано на рисунке. Величину этой внешней силы медленно увеличивают вдвое. На какое расстояние из-за этого сместится *самый* большой поршень? Внешним давлением пренебречь, массы поршней можно считать одинаковыми, нить невесома, нерастяжима и всегда остается натянутой.

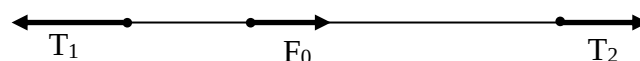


Решение: Для использования в промежуточных вычислениях обозначим силы, действующие на меньший и средний поршни в начальной ситуации, как T_1 и T_2 , соответственно. Начальное давление под каждым поршнем - как P_1 , масса поршня - M . После увеличения внешней силы до $2F_0$ натяжения участков нитей до и после точки приложения обозначим, как T_3 и T_4 . Искомое смещение поршня площадью $3S$ обозначим X , а сопутствующие смещения других поршней - как y .



Условие равновесия нити в начальной ситуации выражается уравнением (натяжение свободного участка невесомой нити одинаково вдоль всего участка):

$$F_0 = T_1 - T_2 \quad (+1 \text{ балл})$$



Для поршней, слева направо, равновесие определяется равенствами (все силы показаны только для третьего поршня):

$$T_1 = Mg - P_1 S$$

(+1 балл за условие равновесия всех поршней)

$$T_2 = Mg - 2SP_1$$

$$0 = Mg - 3P_1 S$$

Из последнего уравнения следует, что под большим поршнем в равновесии всегда одно и то же давление, равное P_1 (+1 балл).

Используя эти уравнения, можно получить упрощенную связь между параметрами задачи:

$$F_0 = T_1 - T_2 = P_1 S = Mg/3$$

После увеличения внешней силы условия равновесия приобретут вид

$$2F_0 = T_3 - T_4$$

Для поршней, слева направо, равновесие определяется равенствами (все силы показаны только для третьего поршня):

$$T_3 = Mg - S(P_1 + \rho g(X - y)) \quad (+2 \text{ балла})$$

$$T_4 = Mg - 2S(P_1 + \rho g(X + y)) \quad (+2 \text{ балла})$$

Здесь учтено, что под большим поршнем давление всегда равно P_1 , что давление в жидкости при увеличении глубины на X возрастает на $\rho g X$, и что смещения малого и среднего поршней одинаковы по величине вследствие нерастяжимости нити.

Вследствие сохранения объема жидкости связь между смещениями поршней имеет вид $yS + 3SX = 2Sy$, откуда получаем, что $y = 3X$ (+1 балл).

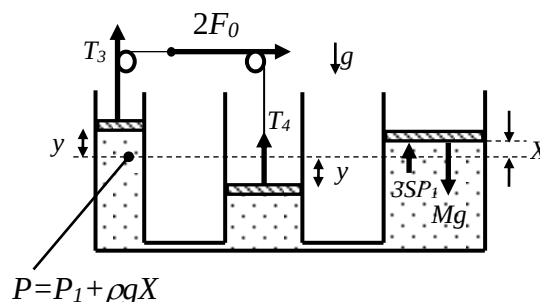
Проводя преобразования, получаем:

$$2F_0 = T_3 - T_4 = P_1 S + \rho g S(3y + X) = F_0 + 10\rho g SX$$

Таким образом,

$$X = \frac{F_0}{10\rho g S}$$

(+2 балла за явно сформулированный и корректно полученный ответ).



Задача не считается решенной, если приводится только ответ!

Желаем успеха!