Всесибирская открытая олимпиада школьников по математике 2025-26 г.г.

Заключительный этап **10 класс**

Время написания работы 4 астрономических часа Решения всех задач оцениваются из 7 баллов

10.1. На доске 8 на 8 произвольным образом отмечены 12 клеток. Докажите, что всегда можно выбрать некоторые 4 горизонтали и некоторые 4 вертикали так, чтобы они содержали все отмеченные клетки.

10.2. Сумма некоторого составного натурального числа и его максимального делителя, отличного от 1 и самого числа, равна p^k для некоторого простого числа p и $k \geq 2$. Найти все возможные значения p.

10.3. Отрезок разделен 19 точками на 20 частей. Каждый из 20 отрезков разбиения нужно сделать стрелкой так, чтобы стрелок, указывающих налево, было столько же, сколько указывающих направо, и для каждой стрелки количество других стрелок, на которые она указывает, отличалось от аналогичного количества у остальных стрелок. Например, в такой расстановке 6 стрелок →←←→←→ они показывают соответственно, на 5,1,2,2,4,0 других стрелок, и она не удовлетворяет условиям. Найти количество всех расстановок 20 стрелок, удовлетворяющих условиям.

10.4. В остроугольном треугольнике ABC обозначим за I центр вписанной в него окружности, а за P - точку пересечения прямой, зеркально симметричной прямой AB относительно биссектрисы CI и прямой, зеркально симметричной прямой BC относительно биссектрисы AI. Докажите, что PI перпендикулярна стороне AC.

10.5. Найти все тройки действительных чисел (a, b, c), удовлетворяющих системе уравнений $a(b^2 + c) = c(c + ab), b(c^2 + a) = a(a + bc), c(a^2 + b) = b(b + ca)$.

Всесибирская открытая олимпиада школьников по математике 2025-26 г.г.

Заключительный этап **10 класс**

Время написания работы 4 астрономических часа Решения всех задач оцениваются из 7 баллов

10.1. На доске 8 на 8 произвольным образом отмечены 12 клеток. Докажите, что всегда можно выбрать некоторые 4 горизонтали и некоторые 4 вертикали так, чтобы они содержали все отмеченные клетки.

10.2. Сумма некоторого составного натурального числа и его максимального делителя, отличного от 1 и самого числа, равна p^k для некоторого простого числа p и $k \geq 2$. Найти все возможные значения p.

10.3. Отрезок разделен 19 точками на 20 частей. Каждый из 20 отрезков разбиения нужно сделать стрелкой так, чтобы стрелок, указывающих налево, было столько же, сколько указывающих направо, и для каждой стрелки количество других стрелок, на которые она указывает, отличалось от аналогичного количества у остальных стрелок. Например, в такой расстановке 6 стрелок →←←→←→ они показывают соответственно, на 5,1,2,2,4,0 других стрелок, и она не удовлетворяет условиям. Найти количество всех расстановок 20 стрелок, удовлетворяющих условиям.

10.4. В остроугольном треугольнике ABC обозначим за I центр вписанной в него окружности, а за P - точку пересечения прямой, зеркально симметричной прямой AB относительно биссектрисы CI и прямой, зеркально симметричной прямой BC относительно биссектрисы AI. Докажите, что PI перпендикулярна стороне AC.

10.5. Найти все тройки действительных чисел (a, b, c), удовлетворяющих системе уравнений $a(b^2 + c) = c(c + ab), b(c^2 + a) = a(a + bc), c(a^2 + b) = b(b + ca)$.