Решения заданий заключительного этапа
Всесибирской открытой олимпиады школьников по математике 2024-25 г. г.
9 класс

Все задачи оцениваются из 7 баллов. Каждое верное решение, вне зависимости от длины и степени красивости, оценивается в 7 баллов

9.1. Ненулевые действительные числа x, y, z таковы, что $\frac{x+y}{z}=\frac{y+z}{x}=\frac{z+x}{y}$. Найти все возможные значения выражения $\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xyz}$.

Ответ. 8 и -1.

Решение 1. Добавим к каждой из трёх дробей в условии по единице, получим равенства $\frac{x+y+z}{z}=\frac{y+z+x}{x}=\frac{z+x+y}{y}$. Если числитель каждой дроби не равен 0, то сократив на него, получим равенства $\frac{1}{z}=\frac{1}{x}=\frac{1}{y}$, откуда $x=y=z$. Выражение $\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xyz}$ при этом равно 8 и достигается для любой тройки $x=y=z\neq 0$, скажем, для $x=y=z=1$. Если $x+y+z=0$, то все дроби в условии равны -1, и выражение $\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xyz}$, равное произведению этих дробей, при этом равно -1. Оно достигается, например, при $x=1, y=1, z=-2$.

Решение 2. Избавляемся от знаменателей в первом равенстве, получим $x^2+xy=yz+z^2$, что равносильно $(x-z)(x+y+z)=0$. Аналогично, второе равенство эквивалентно $(x-y)(x+y+z)=0$. Следовательно, если $x+y+z\neq 0$, то $x=y=z$ и $\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xyz}=8$. А если $x+y+z=0$, то $\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xyz}=\frac{(-z)(-x)(-y)}{xyz}=-1$.

Критерии проверки. (●) Только угаданы оба ответа с приведением соответствующих примеров: 1 балл. (●) Не рассмотрен случай $x+y+z=0$ и найден ответ 8: 4 балла. (●) Не приведены примеры троек переменных, когда найденные значения 8 и -1 достигаются (даже хотя бы одно из них): минус 1 балл за каждое значение.

9.2. На стороне *AD* квадрата *ABCD* вовнутрь него построен равносторонний треугольник *APD*, а на стороне *CD* вовне квадрата – равносторонний треугольник *CQD*. Доказать, что точки *B, P* и *Q* лежат на одной прямой.

Доказательство. Достаточно доказать, что сумма величин углов *APB*, *APD* и *DPQ*, прилегающих к точке P, равна 180°. Очевидно, что величина угла *APD* при вершине *P* равностороннего треугольника *APD* равна 60°. Треугольник *BAP* равнобедренный с равными сторонами *AB*=*AP* и углом *BAP* при вершине *A*, равным 30°, поэтому величина угла *APB* при его основании равна (180°-30°):2=75°. Треугольник *PDQ* тоже равнобедренный с равными сторонами *DP*=*DC*=*DQ* и углом при вершине *D*, равным сумме величин углов *PDC*=30° и *CDQ*=60°, то есть 90°. Поэтому величина угла *DPQ* при его основании равна (180°-90°):2=45°. В итоге сумма величин углов *APB, APD* и *DPQ*, прилегающих к точке *P*, равна 75°+60°+45°=180°, что и требовалось доказать.

Критерии проверки. (●) Идея, что достаточно доказать, что сумма величин углов *APB*, *APD* и *DPQ*, прилегающих к точке P, равна 180°: 1 балл. (●) Доказано, что что величина угла *APD* при вершине *P* равностороннего треугольника *APD* равна 60°: 1 балл. (●) Доказано, что величина угла *APB* равна 75: 2 балла. (●) Доказано, что величина угла *DPQ* равна 45°: 3 балла.

9.3. Рассмотрим произвольную последовательность из 30 чисел, среди которых 15 единиц и 15 двоек. Число S называется *хорошим* для этой последовательности, если в ней можно найти несколько подряд идущих чисел, сумма которых равна в точности S. Здесь *несколько* – это любое количество от 1 до 30 включительно. Найти множество всех натуральных чисел S, хороших для любой последовательности из 15 единиц и 15 двоек.

Ответ. Хорошими являются все натуральные числа от 1 до 45 включительно, кроме чётных чисел от 32 до 44.

Решение. Сначала докажем, что все нечётные числа 1, 3, 5, …,43, 45 хороши для любых последовательностей из условия. Рассмотрим произвольную такую последовательность. Число 45=15$\cdot 1 + 15 \cdot 2$ является суммой всех её членов, и, очевидно, хорошее. Дальше будем укорачивать эту последовательность следующим образом: если последовательность начинается или заканчивается на 2, убираем эту двойку (или любую из них), а если она начинается и заканчивается на 1, убираем из неё обе этих единицы. В результате сумма членов полученной последовательности на каждом шагу уменьшается на 2, поэтому, проделав 22 таких шага, мы найдём в исходной последовательности подпоследовательности со всеми суммами 45, 43, 41, …, 3,1.

Теперь построим последовательность, для которой все чётные числа от 32 до 44 не являются хорошими. В ней первые 8 членов и последние 7 членов равны 2, а остальные равны 1. Любая её подпоследовательность с чётной суммой членов не содержит хотя бы одну единицу, поэтому она не содержит хотя бы 7 двоек и её сумма не превосходит
45-$7 \cdot 2 - 1 = 30$, то есть меньше 32.

Осталось доказать, что все чётные числа 2, 4, 6, …,28, 30 хороши для любых последовательностей из условия. Снова рассмотрим произвольную такую последовательность и единицы, встречающиеся первой и последней среди всех её членов, если смотреть слева направо. Всего в последовательности 15 двоек, поэтому либо до первой единицы, либо после последней единицы идут не больше 7 двоек. Удалим из исходной последовательности данную единицу и соответствующие ей крайние двойки, получим последовательность с чётной суммой членов, не меньшей, чем 45-$7 \cdot 2 - 1 = 30$. Теперь проделаем с ней процедуру укорачивания, описанную в первом абзаце, получим в ней подпоследовательности с суммами членов 28, 26, …, 2.

Критерии проверки. (●) Доказано, что все нечётные числа 1, 3, 5, …,43, 45 хороши для любых последовательностей: 2 балла. (●) Доказано, что все чётные числа от 32 до 44 не являются хорошими: 2 балла. (●) Доказано, что все чётные числа 2, 4, 6, …,28, 30 хороши для любых последовательностей: 3 балла.

9.4. Найти все натуральные числа n такие, что все цифры в десятичной записи числа
$6^n + 1$ одинаковы.

Ответ. $n = 1$ и $n = 5$.

Решение 1. Любая степень числа 6 оканчивается цифрой 6, поэтому, если все цифры в десятичной записи числа $6^n + 1$ одинаковы, то они равны 7. Пусть $6^n + 1 = \underbrace{7 \dots 7}_{m}$ для некоторого натурального m. Тогда $6^n + 1 = 7 \cdot \frac{10^m - 1}{9} \Leftrightarrow 9 \cdot 6^n + 2^4 = 7 \cdot 2^m \cdot 5^m$. Заметим, что $n > m$. Действительно, если $n \le m$, то $16 = 70 \cdot 10^{m-1} - 54 \cdot 6^{n-1} \ge 70 \cdot 10^{m-1} - 54 \cdot 6^{m-1} \ge 16 \cdot 10^{m-1} \ge 16$. При этом равенство достигается только при $m = n = 1$, что даёт первый из ответов. При остальных $2 \le n \le m$ получается противоречие, поэтому $n > m$. Обе части равенства $9 \cdot 6^n + 2^4 = 7 \cdot 2^m \cdot 5^m$ делятся на 2^m и $9 \cdot 6^n =,9 \cdot 2^n \cdot 3^m$ делится на 2^m поэтому и 2^4 делится на 2^m , откуда $m \le 4$. Перебирая значения $m = 2{,}3{,}4$, находим второй ответ $m = 4{,}n = 5$, $6^5 + 1 = 7777$.

Решение 2. Как мы уже поняли, число $6^n = 3^n \cdot 2^n$ должно быть записано несколькими семёрками и последней шестёркой. Следовательно, число $\underbrace{7 \dots 76}_{m}$ должно делиться на 2^n. Воспользуемся удобным в этой ситуации признаком делимости на 2^n: натуральное число делится на 2^n тогда и только тогда, когда число, образованное его последними n цифрами делится на 2^n. Этот признак хорошо известен в школе для случаев $n = 1{,}2$, и легко доказывается в общем случае, ·мы не будем требовать от участников олимпиады этого доказательства. Отметим, что, если число, образованное n последними цифрами числа А, не делится на 2^n, то и все числа, образованные его последними m цифрами, не делятся на

2^m для всех $m \geq n$. Действительно, делимость числа на 2^m для $m \geq n$ влечёт делимость и на 2^n, поэтому, если бы последние $m > n$ цифр А образовывали число В, делящееся на 2^m, то последние n цифр В образуют число, делящееся на 2^n, совпадающее с числом, образованном последними n цифрами исходного числа А. Это влечёт делимость А на 2^n и ведёт к противоречию.

Посмотрим, для какого максимального n число $\underbrace{7\ldots76}_{n}$ делится на 2^n? Имеем: $6 = 2^1 \cdot 3, 76 = 2^2 \cdot 19, 776 = 2^3 \cdot 97,\ 7776 = 2^4 \cdot 486, 77776 = 2^5 \cdot 2430 + 16$, следовательно, при $n \geq 6$ число $\underbrace{7\ldots76}_{n}$ уже не делится на 2^n. Поэтому все кандидаты на роль ответа содержатся среди рассмотренных чисел $6, 76, 776, 7776$ и легко находятся ответы $6 = 6^1, 7776 = 6^5$.

Критерии проверки. Для решения 1: (●) Угаданы оба ответа с проверкой: 1 балл. (●) В процессе решения утверждение о том, что $n > m$ используется без доказательства: минус 2 балла. (●) Упущен ответ $n = 1$: минус 1 балл.

Для решения 2: (●) Не сформулировано явно, что, если число, образованное n последними цифрами числа, не делится на 2^n, то и все числа, образованные его последними m цифрами, не делятся на 2^m для всех $m \geq n$: снимаем 2 балла. (●) Сформулировано, но не доказано: снимаем 1 балл.

9.5. Вася и Петя по очереди красят клетки доски 11 на 11, начинает Вася. Первоначально все клетки доски белые, Вася красит любую белую клетку в красный цвет, а Петя – любую белую клетку – в синий. Красить не белые клетки нельзя, пропускать свой ход тоже нельзя, окрашивание продолжается до тех пор, пока все клетки доски не будут окрашены. Если после окончания окрашивания красные клетки образуют *связное* множество, то выиграл Вася, в противном случае – Петя. Кто победит - Вася или Петя? Множество клеток называется *связным*, если от любой из этих клеток до любой другой можно добраться за несколько шагов, последовательно переходя от клетки в одну из соседних с ней по стороне или вершине клеток.

Ответ. Победит Петя.

Решение. Стратегия Пети заключается в том, что он своими ходами разделит множество всех клеток доски на две части таких что:
1) из каждой из них нельзя перейти в другую, последовательно переходя от клетки в одну из соседних с ней по стороне или вершине клеток, минуя синие клетки.
2) в каждой из этих частей после окончания игры окажется хотя бы по одной красной клетке.

Разделяющее множество будет включать граничные клетки и построено так, что от каждой синей клетки до каждой можно добраться, последовательно переходя от клетки в одну из соседних с ней по стороне клеток. В основном оно будет проходить по второй слева вертикали и второй снизу горизонтали.

После первого хода Васи выделим пять крайних горизонталей и пять крайних вертикалей доски, не содержащих только что окрашенной им красной клетки. Можно считать, что это пять нижних горизонталей и пять левых вертикалей. Тем самым мы выделили часть доски, где нет красных клеток и где будет происходить построение Петиной синей перегородки. Занумеруем их, как в шахматах, вертикали - буквами a, b, c, d, e, а горизонтали - цифрами 1, 2, 3, 4, 5. Своим первым ходом Петя красит в синий цвет клетку ***b2*** с намерением отгородить ходами от неё вверх и вправо от остальной доски несколько клеток, содержащих угловую клетку а1.

1) Если вторым ходом Вася не красит ни одну из клеток ***a1, a2, b1***, выберем из вертикалей ***a*** и ***b*** и горизонталей 1 и 2 ту полосу ширины 2, в которую Вася не сходил вторым ходом, можно считать, что эти горизонтали 1 и 2. Следующим ходом Петя красит ***a2***. Если своим следующим (третьим) ходом Вася не покрасит ***b1***, то проиграет, поскольку

её покрасит Петя и отгородит угловую ***a1*** от остального мира: если она будет вторым ходом Васи окрашена в красный цвет, то эта клетка уже отгорожена от остальных, если нет, то своими дальнейшими ходами Петя будет красить что угодно, кроме ***a1***, и из-за нечётности количества клеток доски, рано или поздно, возможно, последним ходом, Васе придётся покрасить ***a1*** и создать отгороженную красную клетку.

Замечание. Нечётность размера доски используется именно в этом месте для создания Петей «мины» на ***a1*** для Васи.

Таким образом, в рассматриваемой ситуации третьим ходом Васе придётся покрасить ***b1***, на что Петя ответит окраской ***c2***. Васе придётся окрасить ***c1***, иначе Петя тут же отгородит его красную ***b1*** ходом ***c1***. На это Петя ответит окраской ***d2.*** Продолжая так далее, Петя будет продлевать свою линию синих клеток по второй горизонтали, всегда опережая Васю на одну клетку, и на каждый его ход Васе придётся отвечать единственным способом, продлевая свою линию красных клеток по первой горизонтали. Всё это в итоге упрётся в правый край доски на десятом ходу Пети и отгородит Васины клетки на первой горизонтали от остальных. Следовательно, если Вася своим вторым ходим не окрасит ни одну из клеток *a1, a2, b1,* то проиграет. Заметим, что в при этом в первых двух горизонталях Васиных клеток нет, и ничто не помешает стратегии Пети.

2) Пусть теперь вторым ходом Вася красит одну из клеток ***a1, a2, b1***.

Первый случай, когда он красит ***a1***. Тогда вторым ходом Петя красит ***a2*** и ситуация полностью повторяет только что рассмотренный случай 1).

Второй случай. Вася вторым ходом красит ***b1***, (ситуация, когда он красит ***a2***, рассматривается симметрично) Петя в ответ красит ***c2*** и его горизонтальная красная вторая горизонталь на одну клетку длиннее, чем Васина синяя первая. Это состояние он и будет поддерживать дальше, если Вася своим ходом будет продлевать первую красную горизонталь. Если Вася каким-то очередным ходом окрасит ***a1***, то Петя перекроет ему путь наверх, окрасив ***a2***. Если Вася каким-то очередным ходом окрасит ***a2***, то Петя окрасит ***b3*** и создаст свою вторую заградительную синюю линию по вертикали ***b***, которая тоже на одну клетку длиннее Васиной красной вертикали ***a***. Дальше на каждое продление Васей одной из своих линий вдоль края доски Петя будет продлевать соответствующую свою, а на любой другой ход Васи Петя будет отвечать перекрытием одной из Васиных линий с торца. Поскольку Петины линии после каждого его хода длиннее Васиных, то не более, чем через 18 ходов Петя либо достигнет верхний и нижний края доски, либо перекроет с торцов обе Васиных линии. В обоих случаях его цель будет достигнута и некоторое количество Васиных клеток будут отрезаны от остальных.

Критерии проверки. (●) Идея Петиного ответа на b2: 1 балл. (●) Идея «мины» на a1: 2 балла. (●) Идея построения одной заградительной линии: 2 балла. (●) Добавление ещё одной заградительной линии: 2 балла.

Замечание. В любом верном решении должно быть явное использование в каком-то месте нечётности размера доски. В каждый момент выбора хода Пети в работе должно быть упоминание о том, что на выбранном им направлении нет красных клеток и ничто не помешает его стратегии. В противном случае, нужно снимать 2 балла.