

**Решения и критерии проверки задач второго этапа
Всесибирской олимпиады школьников 2020-2021 гг. по математике
11 класс**

11.1. На окружности расставлены четыре числа, сумма которых равна нулю. Для каждой пары соседних чисел нашли их произведение и полученные четыре числа просуммировали. Может ли полученная сумма быть положительной?

Ответ. Нет, не может.

Решение. Обозначим расставленные числа за a, b, c, d , по условию $a + b + c + d = 0$. Тогда

$$ab + bc + cd + da = b(a + c) + d(c + a) = (a + c)(b + d) = -(a + c)^2 \leq 0.$$

11.2. Пусть n – натуральное число, не заканчивающееся на 0, и $R(n)$ – четырёхзначное число, получающееся из n изменением порядка следования его цифр на обратный, например $R(3257) = 7523$: Найти все натуральные четырёхзначные числа n такие, что $R(n) = 4n + 3$.

Ответ. 1997.

Решение. Рассмотрим десятичную запись исходного четырёхзначного числа $n = \overline{abcd}$, тогда $R(n) = \overline{dcba} = 4n + 3$ – тоже четырёхзначное число. Следовательно, $4a \leq 9$, поэтому $a = 1$ или $a = 2$. Кроме того, число $R(n) = \overline{dcba} = 4n + 3$ является нечётным и оканчивается на a , значит $a = 1$. Если число $4n + 3$ оканчивается на 1, то n должно оканчиваться на 2 или 7. то есть $d = 2$ или $d = 7$. Первое невозможно, так как $d \geq 4a \geq 4$, поэтому $d = 7$.

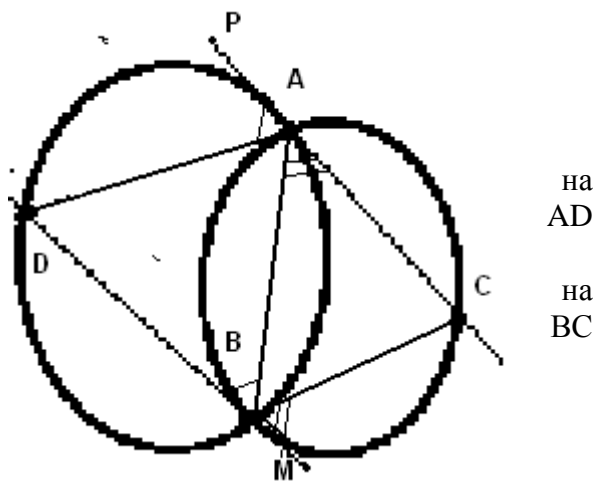
Подставляем найденные значения в равенство из условия:
 $R(n) = 4 \cdot \overline{abcd} + 3 = 4031 + 400b + 40c = 7001 + 100c + 10b$, откуда $13b - 2c = 99$. Отсюда $b \geq \frac{99}{13} = 7\frac{8}{13}$, то есть $b = 8$ или $b = 9$. При $b = 8$ левая часть равенства $13b - 2c = 99$ чётна, что невозможно, следовательно $b = 9$ и $c = 9$.

Критерии проверки. Ответ: 2 балла. Доказательство, что других ответов нет: 5 баллов.

11.3. Две окружности пересекаются в точках А и В. Через точку А провели касательную к первой окружности, пересекающую вторую в точке С. Через точку В провели касательную ко второй окружности, пересекающую первую в точке D. Найти угол между прямыми AD и BC.

Ответ. Прямые параллельны, угол равен 0° .

Решение. Отметим точку P на продолжении CA за точку A и точку M на продолжении DB за точку B. Вписанный в первую окружность и опирающийся хорду AD угол ABD равен углу PAD между хордой и касательной AC к первой окружности. Вписанный во вторую окружность и опирающийся хорду BC угол CAB равен углу CBM между хордой и касательной BD ко второй окружности. Тогда угол BAD между секущей прямой AB и прямой AD равен разности 180° и суммы углов PAD и CAB, что равно разности 180° и суммы углов ABD и CBM, то



есть углу ABC между секущей прямой АВ и прямой ВС. Следовательно, прямые AD и BC параллельны.

Критерии проверки. Только ответ: 0 баллов.

Снятие до одного балла по каждому из 4-х пунктов:

- Нет достаточно полных формулировок фактов и теорем из курса геометрии, на основании которых доказывается приведенное равенство углов для любой из окружностей.
- Нет аккуратного применения общего теоретического утверждения в отношении задачи для выбранного случая: данной окружности, хорды, касательной. Какие отрезки, прямые чем являются и для какой именно окружности - не прописано.
- Нет обоснования перехода от равенства углов к параллельности прямых, не сформулирован четко признак параллельности прямых.
- Для доказательства используется самостоятельно введенная точка пересечения прямых AC и BD. В этом случае необходимо рассмотреть другие случаи расположения прямых AC и BD: прямые параллельны (тогда пересечения не может быть), точка пересечения лежит по другую сторону.

11.4. Последовательность натуральных чисел $a_n, n=1,2,\dots$ такова, что $a_1=1$ и $a_n = \frac{n+1}{n-1}(a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1})$ для всех $n=2,3,\dots$. Найти формулу «общего члена последовательности», то есть формулу, явно выражающую a_n через n при произвольном n .

Ответ. $a_n = (n+1)2^{n-2}$

Решение. Найдём несколько первых членов последовательности: $a_1=1$, $a_2 = \frac{3}{1} \cdot 1 = 3 \cdot 1$,

$a_3 = \frac{4}{2} \cdot (1+3) = 8 = 4 \cdot 2$, $a_4 = \frac{5}{3} \cdot (1+3+8) = 20 = 5 \cdot 4$ и сделаем предположение о том, что

$a_n = (n+1)2^{n-2}$. Также вычислим суммы первых членов этой последовательности: $s_1 = a_1 = 1$,

$s_2 = a_1 + a_2 = 1 + 3 = 4 = 2 \cdot 2$,

$s_3 = a_1 + a_2 + a_3 = 1 + 3 + 8 = 12 = 3 \cdot 4$

$s_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1 + 3 + 8 + 20 = 32 = 4 \cdot 8$, и сделаем предположение о том, что $s_n = n \cdot 2^{n-1}$.

Докажем сделанные предположения методом математической индукции. Во первых.

$a_{n+1} = \frac{n+2}{n} \cdot s_n = \frac{n+2}{n} \cdot n \cdot 2^{n-1} = (n+2) \cdot 2^{n-1} = ((n+1)+1) \cdot 2^{(n+1)-2}$ верно. Далее,

$s_{n+1} = s_n + a_{n+1} = n \cdot 2^{n-1} + (n+2) \cdot 2^{n-1} = 2(n+1) \cdot 2^{n-1} = (n+1) \cdot 2^{(n+1)-1}$ - тоже верно.

11.5. Пусть M – некоторое множество пар натуральных чисел $(i, j), 1 \leq i < j \leq n$ для фиксированного $n \geq 2$. При этом, если пара (i, j) принадлежит M, то никакая пара (j, k) ему не принадлежит. Какое наибольшее множество пар может быть во множестве M?

Ответ. $\frac{n^2}{4}$ при чётном n , $\frac{n^2-1}{4}$ при нечётном n .

Решение. Назовём натуральное число k из интервала от 1 до n *начальным*, если оно является меньшим числом в некоторой паре (k, j) из M , а натуральное число l из интервала от 1 до n *конечным*, если оно является большим числом в некоторой паре (i, l) из M . Никакое число m из интервала от 1 до n не может являться одновременно и начальным и конечным, в противном случае M содержало бы одновременно пары (i, m) и (m, j) для некоторых i и j , что невозможно по условию. Каждая пара (i, l) из M полностью определяется своими начальным числом i и конечным числом j , следовательно, M содержит не более ab пар, где a и b - количества его начальных и конечных чисел соответственно. Тогда $ab \leq a(n-a) = an - a^2$ - квадратичная функция от целого переменного a . При чётном n она принимает максимальное значение $\frac{n^2}{4}$ при $a = \frac{n}{2}$, а при нечётном n она принимает максимальное значение $\frac{n^2-1}{4}$ при $a = \frac{n-1}{2}$ и $a = \frac{n+1}{2}$.

Пример множества M , для которого эти максимальные оценки достигаются, строится так: объявим начальными все числа от 1 до $\frac{n}{2}$ при чётном n , и все числа от 1 до $\frac{n-1}{2}$ при нечётном n , остальные числа объявим конечными. Поместим в M все возможные пары начального и конечного чисел. Их будет как раз столько, сколько в ответе.

Критерии проверки. Ответы с доказательством максимальности: 5 баллов. Примеры, когда ответы достигаются: 2 балла.

Ниже приведены наиболее популярные причины снижения оценки. Баллы за несколько снижений суммируются. Если причина снижения оценки, указанная в комментарии к проверке соответствует одному из указанных ниже критериев, оно не может быть оспорено. Возможны снижения с несколько отличными формулировками, это могло зависеть от текста решения.

Решения об аннулировании решений за плагиат принимались жюри на основе практической тождественности текстов решений (ID таких текстов указаны в комментариях) и не оспариваются.

Далее "явно" - значит точно прописано в тексте заявленного решения.

Нет явного обоснования того, что сумма количеств чисел i и j , которые могут стоять на первом и втором местах пар соответственно, не больше n	минус 2 балла
Нет явной формулировки того, что сумма количеств чисел i и j , которые могут стоять на первом и втором местах пар соответственно, не больше n , при каком-то обосновании её в решении	минус 1 балл
Нет аккуратности в обосновании того, что в случае максимальности числа пар в M сумма количеств чисел i и j , которые могут стоять на первом и втором местах пар равно в точности n (a не меньше), а это явно использовано в решении при доказательстве неравенства	минус 1 балл
Нет строгого и явного (а не со словами "хорошо известно" или "легко убедиться") обоснования максимальности $\frac{n^2}{4}$ при исследовании неравенства:	минус 2 балла
Не приведены явно точные примеры, когда максимальная мощность M достигается:	минус 2 балла
Не приведены явно точные примеры, когда максимальная мощность M достигается для произвольного n , а не только на примерах для малых значений:	минус 1 балл
Не приведен явно точный пример, когда максимальная мощность M достигается для нечётного n :	минус 1 балл
Не выписаны явно ответы в зависимости от чётности n :	минус 2 балла

нет верного ответа для нечётного n :	минус 2 балла
Только приведены примеры к верным ответам, максимальность ответов не доказана, или «доказана» со словами "очевидно, что", "оптимальный способ" и прочее :	минус 2 балла

В решениях с явным построением максимального множества M по таблице или системе координат

а) при использовании процедуры "переноса точек" нет явного чёткого обоснования того, что перенесённые точки не помешают уже стоящим.

б) нет объяснения, что построенное M будет не только максимальным из строящихся этим способом, а вообще из всех множеств.

При наличии таких замечаний решение оценивается как построение примеров, если они верны. **Это 2 балла.**