Решения и критерии проверки задач Заключительного этапа Всесибирской олимпиады школьников 2016-2017 г.г. по математике
7 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

7.1. Пароход “Раритет” стремительно идёт ко дну. Если капитан Алексей раздаст ровно 2017^{2017} указаний своим 26 матросам, то пароход получится спасти. Каждому следующему матросу Алексей может дать на 2 указания меньше или на 2 указания больше, чем предыдущему. Сможет ли Алексей спасти пароход?

Ответ: Нет.

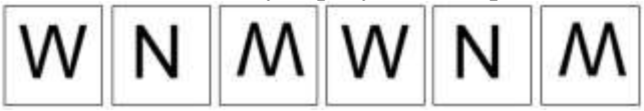
Решение: Очевидно, что чётность количества полученных указаний у всех матросов одинакова. Но тогда общее число полученных указаний - это сумма 26 чисел одной чётности, т.е. чётное число. Но 2017^{2017} — нечётное, поэтому это невозможно.

Критерии:

Только ответ, ответ с проверкой – 0 баллов.

Утверждения «чётность количества полученных указаний у всех матросов одинакова» и «сумма 26 чисел одной чётности – чётное число» -- очевидные, за отсутствие обоснований этих фактов баллы не снимать.

7.2. У Данила есть 6 карточек с буквами, из которых он смог сложить слово WNMWNM, изображённое на картинке. Заметим, что данное слово обладает замечательным свойством: если его перевернуть на 180 градусов, получится оно же. Сколько всего слов, обладающих таким свойством, может составить Данил, используя сразу все 6 карточек?



Ответ: 12 слов.

Решение:

(1) По условию у Данила есть 2 карточки с буквой N, которая при переворачивании переходит в себя, и 4 карточки с буквой M, которая при переворачивании переходит в букву W. Очевидно, чтобы получить слово с искомыми свойствами, нужно как-то расположить 2 буквы M и одну N в первой половине, тогда вторая половина слова восстановится однозначно.

(2) Поставить букву N можно тремя способами, после чего на первое из оставшихся мест букву M можно поставить двумя способами (перевернуть или нет), и на последнее тоже двумя. Всего вариантов 3*2*2 = 12.

Критерии:

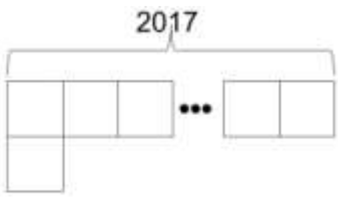
Только ответ - 1 балл.

Только идея, что первые три буквы задают слово однозначно (часть (1) решения) - 2 балла (складывается с предыдущим).

После замечания (1) перебор всех вариантов с хотя бы одним пропущенным случаем – не более трёх баллов.

Выписаны все 12 вариантов, но не написано, почему других вариантов нет – 1 балл.

7.3. Клетки бесконечной клетчатой плоскости покрасили в чёрный и белый цвета таким образом, что в любом уголке из 2018 клеток (даже повёрнутом и/или перевёрнутом) белых и чёрных клеток поровну. Верно ли, что все клетки плоскости покрашены в шахматном порядке?



Ответ: да.

Решение:

(1) заметим, что если уголок лежит так, как показано на рисунке, то его можно развернуть выпирающей клеткой вверх. При этом все остальные клетки останутся на своих местах. Значит, в любом столбце клетки через одну имеют одинаковые цвета. Аналогичное рассуждение верно и для строк.

(2) Допустим, раскраска не шахматная, тогда найдутся две соседние клетки одного цвета. Допустим, это две клетки белого цвета в строке.

(3) Из (2) и (1) получаем, что вся строка белая. Действительно, в (1) мы показали, что клетки через одну повторяются, соответственно, если мы знаем цвета двух соседних клеток, то знаем цвета клеток всей строки.

(4) Расположим уголок длинной частью в белой строке, тогда количество белых в нём хотя бы 2017, а черных не более 1. Противоречие с условием. Значит, нет клеток одного цвета стоящих рядом, то есть раскраска шахматная.

Критерии:

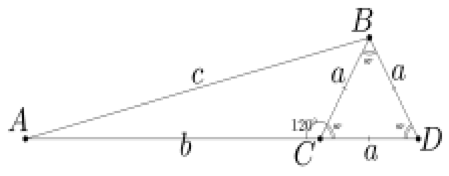
Утверждение (1) – 2 балла, замечание (2) – 1 балл, замечание (3) – 2 балла. Эти баллы суммируются.

Только ответ – 0 баллов.

7.4. В треугольнике со сторонами длиной *a*,*b* и *c* напротив стороны *c* лежит угол в 120 градусов. Докажите, что из отрезков длины *a, c* и *a*+*b* можно составить треугольник.

Решение:

Пусть дан треугольник *ABC*, в котором *AB = c, AC = b, BC = a*. Продлим отрезок *AC* за точку *C* до точки *D* на расстояние *a*. Получим треугольник *CBD*. В нём *BC = CD*, то есть он равнобедренный, и угол *BCD* = 60 градусам как смежный углу *BCA*. Но тогда треугольник *BCD* равносторонний, и *BD = a*. Рассмотрим треугольник *ABD*. В нём *AB = c, BD = a, AD = a+b*, то есть он является искомым.



Критерии:

Чертёж, аналогичный данному, без обоснования – 5 баллов.

7.5. Есть 12 монет, из которых одна, фальшивая, легче остальных. Также имеются чашечные весы без гирь. Про них известно, что они либо обычные (то есть на них всегда перевешивает тяжёлая кучка), либо волшебные (на таких всегда перевешивает лёгкая кучка, равенство показывается правильно), но неизвестно, волшебные они всё-таки, или обычные. Можно ли за три взвешивания на таких весах найти фальшивую монету?

Ответ: Можно.

Решение:

Взвесим монеты 1, 2, 3, 4 и 5, 6, 7, 8.

1. если равенство, то все эти монеты нормальные, а фальшивая 9, 10, 11 или 12.

Взвесим 1, 2, 3 и 9, 10, 11.

1.2. Если равенство, то фальшивая монета 12.

1.3. Если неравенство, то мы узнаём, какие у нас весы – волшебные или нет. Тогда у нас осталось одно взвешивание, три подозрительные монеты. Взвесим 9 и 10 монеты, если равенство, то фальшивая 11, если неравенство, то фальшивая монета определяется однозначно, ведь мы знаем, какие у нас весы.

2. Если неравенство в первом взвешивание. Допустим, не умоляя общности, перевесила чаша 1, 2, 3, 4. Тогда вторым взвешиванием взвесим 2, 3, 6 и 10, 4, 5.

2.1. Если второе взвешивание привело к равенству. Значит, фальшивая 1 и весы волшебные или весы обычные, а фальшивая 7 или 8. Взвесив 7 и 8, узнаем это.

2.2. Пусть перевесила чаша 2, 3, 6. Тогда или весы волшебные, а фальшивая 2 или 3, или весы обычные, а фальшивая 5. Взвесив 2 и 3, узнаем это.
2.3. Пусть перевесила чаша 10, 4, 5. Тогда фальшивая 4 и весы волшебные, либо весы обычные, а фальшивая 6. Взвесив 6 и 12, узнаем это.

Критерии:

В алгоритме пропущены простые случаи – не более 3 баллов.

В алгоритме пропущены сложные случаи – 0 баллов.

Решения и критерии проверки задач Заключительного этапа Всесибирской олимпиады школьников 2016-2017 г.г. по математике
8 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

8.1. В вагон загрузили несколько килограммов яблочного джема, среди которого было 20% хорошего и 80% плохого. Каждый день половина имеющегося плохого джема сгнивала, и его выбрасывали. Через несколько дней оказалось, что в вагоне стало 20% плохого и 80% хорошего джема. Сколько дней прошло после загрузки?

Ответ: 4 дня.

Решение 1: Пусть изначально всего было x, а в конце стало y килограммов джема. Тогда, так как количество хорошего джема не менялось, $0.2x = 0.8y$, то есть $x = 4y$. Отсюда, изначально плохого джема было $0.8x = 3.2y$, а стало $0.2y$, то есть масса плохого джема уменьшилась в 16 раз. Из того, что каждый день количество плохого джема уменьшалось вдвое, ясно, что прошло 4 дня.

Решение 2: Сначала было 100 условных единиц джема: 20 хорошего и 80 плохого. В конце плохого джема стало 20%, а хорошего – 80% от нового количества, то есть хорошего стало в 4 раза больше. То есть новое количество плохого джема составляет 5 условных единиц. При этом оно каждый раз уменьшалось в 2 раза, а в итоге уменьшилось в 16 раз, значит, прошло 4 дня.

Критерии: Только ответ, ответ с проверкой – 1 балл. В решении, аналогичном второму, вводятся не абстрактные единицы измерения, а конкретные и при этом никак не поясняется, что единицы измерения не важны – 1 балл.

8.2. Однажды Алексей и Данил играли в такую игру. Если на доске записано некоторое число x, то его можно стереть, а вместо него записать $2x$ или x-1000. Проигрывает тот, кто получил число не больше 1000 или не меньше 4000. Оба игрока стремятся победить. В какой-то момент ребята перестали играть. Кто проиграл, если первым числом было 2017?

Ответ: никто не проиграл.

Решение: заметим, что если число меньше 2000, но больше 1000, то умножением на 2 можно получить число, которое меньше 4000. Если число меньше 4000, но больше 2000, то вычитанием 1000 (возможно, два раза) можно получить число между 1000 и 2000. Таким образом, единственное число, из которого нельзя сделать ход – 2000.

Докажем, что 2000 никто получить не мог. Заметим, что исходное число не делится на 5. Если мы умножаем его на 2 или вычитаем из него 1000, то новое число снова не делится на 5.

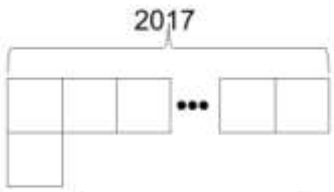
Таким образом, Алексей и Данила могли бы продолжать свою игру вечно и никто не проиграл.

Критерии:

Замечено только, что из чисел меньше 2000 и больше 2000 всегда можно сделать ход – 3 балла.

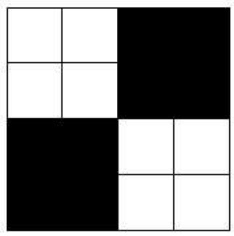
Доказано только, что 2000 получить не получится – 3 балла.

8.3. Клетки доски 4028 на 4028 покрашены в чёрный и белый цвет таким образом, что в любом уголке из 2018 клеток (даже повёрнутом и/или перевёрнутом) белых и чёрных клеток поровну. Верно ли, что все клетки обязательно покрашены в шахматном порядке?



Ответ: Нет, не обязательно

Решение: Раскрасим всю доску в шахматном порядке, а центральный квадрат 4 на 4 так, как изображено на картинке. Проверим, что в любом уголке указанного размера чёрных и белых клеток поровну. Если он не задевает центральный квадрат 4 на 4, это очевидно.

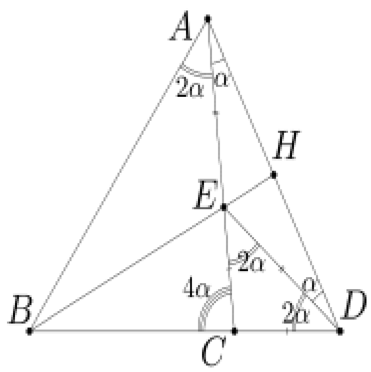


Прислоним теперь уголок короткой стороной к верхней стороне квадрата, а длинную направим вниз. Заметив, что 2017 = (4028/2) + 3, понимаем, что он выступит ниже квадрата 4x4 на одну клетку. В частности, из этого следует, что уголок может пересекать квадратик только ровно по 4 клеткам (иначе он просто не влезет целиком в большой квадрат). Очевидно, что в этом случае в их пересечении 2 белых и 2 чёрных клетки. Мысленно выбросим их из уголка, несложно заметить, что оставшиеся покрашены внутри уголка в шахматном порядке, а значит, их равное количество.

Критерии:

Только пример без обоснования – 5 баллов.

8.4. В треугольнике *ABC* провели биссектрису *BE*. Оказалось, что *BC* + *CE* = *AB*. Докажите, что в треугольнике *ABC* есть два угла, один из которых в два раза больше другого.



Решение: Продлим сторону *BC* за точку *C* до точки *D* такой, что *EC* = *CD*. Продлим *BE* до пересечения с *AD* в точке *H*. Так как *BC* + *CD* = *BC* + *CE* = *AB*, треугольник *ABD* равнобедренный, значит, биссектриса *BH* является медианой и высотой. Заметим, что тогда она является медианой и высотой в треугольнике *AED*, то есть он тоже равнобедренный. Обозначим за α угол *EAD*, ему же равен угол *ADE* как соответственный угол при основании равнобедренного треугольника. Тогда $\angle CED = 2\alpha$ как внешний угол к треугольнику *AED*. Следовательно, $\angle EDC = 2\alpha$, как угол при основании в треугольнике *EDC* (напомним, что треугольник *EDC* равнобедренный по построению). Тогда $\angle ADB = \angle ADE + \angle EDC = 3\alpha$. Отсюда $\angle BAE = \angle BAD - \angle EAH = 3\alpha - \alpha = 2\alpha$. Осталось заметить, что $\angle ECB = 4\alpha$ как внешний к треугольнику *ECD*, а значит, мы нашли два искомых угла.

8.5. В списке *1,2,...,2016* отметили два числа $a < b$, разделив ими ряд на 3 части (возможно, некоторые из частей не содержали чисел вообще). После этого список перемешали следующим образом: a и b остались на местах, а ни одно из других 2014 чисел не осталось в той же части, где было изначально. Сколькими способами можно было выбрать a и b?

Ответ: 1 + 2 + … + 1008 = 1009*504 = 508536 способов.

Решение:

Гипотеза. Докажем, что вопрос эквивалентен подсчёту числа способов разбить *2014* на три упорядоченных неотрицательных слагаемых $2014 = x + y + z$, для которых выполнено нестрогое неравенство треугольника, т.е. $x + y \geq z$, $x + z \geq y$, $y + z \geq x$.

Необходимость. Если мы выбрали a и b, то у нас образовались три числовых отрезка, в которых в сумме *2014* чисел. Понятно, что если в каком-то из них чисел больше, чем в двух других вместе взятых, то перемешать числа указанным способом мы не сумеем.

Достаточность. Выберем $a = x + 1$, $b = x + y + 2$, то есть разобьём ряд на части в x,y и z чисел. Докажем, что перемешать числа указанным способом мы сумеем. Будем считать $x \geq y \geq z$. Известно, что $y + z \geq x$, остальные неравенства выполняются автоматически. Будем теперь менять числа из y и z местами попарно, пока нетронутых чисел не останется в сумме ровно x. После этого меняем все числа из x на все нетронутые числа из y и z и получаем искомую перестановку.

Почему это можно сделать? Во-первых, сначала чисел в y и z хотя бы x по неравенству треугольника, и каждым действием мы количество нетронутых уменьшаем на *2*. Но $x + y + z =$

2014, поэтому x и $(y+z)$ имеют одну чётность, откуда и следует, что рано или поздно мы получим требуемое.

Подсчёт способов: совершим перебор по x. Он меняется от 0 до 1007, тогда $y + z \geq x$ выполнено.

$x = 0$, $y \geq z$, $z \geq y$, следовательно, $z = y = 1007$ – один способ

$x = 1$, $1 + y \geq z$, $z + 1 \geq y$, $y = 2013 – z$, следовательно, $1007 \geq z$; $z \geq 1006$ – два способа

…

$x = k$. $k + y \geq z$, $z + k \geq y$, $y = 2014 - k - z$. следовательно, $k + 2014 - k - z \geq z$, $z + k \geq 2014 - k - z$, то есть $1007 \geq z$; $z \geq 1007 - k$ – $(k+1)$ способ.

...

Всего 1 + 2 + … + 1008 = 1009*504 = 508536 способов.

Критерии:

Только ответ – 0 баллов

Только гипотеза – 1 балл.

Только необходимость – 1 балл.

Только достаточность – 2 балла.

Только подсчёт – 3 балла.

Эти баллы суммируются.

Решения заданий заключительного этапа Всесибирской открытой олимпиады школьников 2016-2017 г.г. по математике

9 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

9.1. На сторонах AB и AD квадрата ABCD внутрь него построены равносторонние треугольники ABK и ADM соответственно. Докажите, что треугольник CKM тоже равносторонний.

Доказательство. По построению, отрезки BK и DM равны ребру квадрата и углы CBK и CDM равны 30°, поэтому равнобедренные треугольники CBK и CDM равны по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, их основания CK и CM тоже равны и треугольник CKM – равнобедренный. Треугольники CBK и CDM равнобедренные с углами 30°при вершинах B и D, поэтому величины углов BCK и DCM при их основаниях равны 75°, значит, углы BCM и DCK равны 15°, поэтому угол KCM равен 60°. Следовательно, треугольник CKM является равнобедренным с углом 60° при вершине, то есть, равносторонним.

Второй способ. Можно просто посчитать в координатах, длина стороны треугольника CKM при этом равна $(2-\sqrt{3})AB$.

Критерии проверки. Доказано равенство CK и CM: 3 балла. Доказано, что величина угла KCM равна 60°: 4 балла.

9.2. За круглым столом расселись 15 мальчиков и 20 девочек. Оказалось, что количество пар сидящих рядом мальчиков в полтора раза меньше, чем количество пар сидящих рядом девочек. Найти количество пар мальчик – девочка, сидящих рядом.

Ответ. 10.

Решение. Назовём *группой* несколько детей одного пола, сидящих подряд, слева и справа от крайних из них уже сидят дети противоположного пола. Пусть X –число групп мальчиков, оно равно и числу групп девочек, сидящих подряд. Легко убедиться, что число пар соседних детей в каждой группе на один меньше, чем число детей в этой группе, поэтому число пар сидящих рядом мальчиков равно $15\text{-}X$, а число пар сидящих рядом девочек равно $20\text{-}X$. По условию, 3(15-X)=2(20-X), откуда X=5. Следовательно, пар соседних мальчиков 10, девочек - 15, а смешаных соседних пар 15+20-(10+15)=10.

Критерии проверки. Замечено, что число пар соседних детей в каждой группе на один меньше, чем число детей в этой группе: 1 балл. Замечено, что число пар сидящих рядом мальчиков равно $15\text{-}X$, а число пар сидящих рядом девочек равно $20\text{-}X$: 2 балла. Замечено, что число групп мальчиков равно числу групп девочек: 1 балл.

9.3. Можно ли представить число 2017 в виде суммы двух натуральных чисел, сумма цифр одного из которых вдвое больше суммы цифр другого?.

Ответ. Нельзя.

Доказательство. Предположим противное, что 2017 можно представить как сумму натуральных чисел A и B, причём сумма цифр A вдвое больше суммы цифр B. При сложении двух цифр одного разряда в нём остаётся их сумма, если она меньше 10, либо их сумма минус 10, если она больше 10, а единица уходит в следующий разряд. Таким образом, сумма цифр A+B равна сумме цифр A плюс сумма цифр B минус число переходов единицы в следующий разряд при сложении, умноженное на 9. По условию, сумма цифр A вдвое больше суммы цифр B, поэтому их общая сумма делится на 3, значит и сумма цифр A+B=2017 должна делиться на 3 – противоречие с тем, что сумма цифр числа 2017 равна 10.

Критерии проверки. Замечено, что сумма цифр A+B равна сумме цифр A плюс сумма цифр

В минус число переходов единицы в следующий разряд при сложении, умноженного на 9: 3 балла.

9.4. Какое максимальное число треугольников с вершинами в вершинах правильного 18-ти угольника можно отметить так, чтобы никакие две различных стороны этих треугольников не были параллельны? Треугольники при этом могут пересекаться и иметь общие вершины, совпадающие отрезки считаются параллельными.
Ответ. 5.
Решение. Оценка числа треугольников. Занумеруем вершины 18-ти угольника от 1 до 18 по часовой стрелке. Сторонами треугольников являются стороны и диагонали правильного 18-ти угольника. Назовём диагональ *чётной*, если между её концами содержится чётное число сторон, и *нечётной* – в противном случае. Чётность диагонали совпадает с чётностью разности номеров её концов. Ввиду чётности общего числа сторон многоугольника всё равно, с какой стороны от диагонали считать число сторон. Стороны тоже считаем нечётными диагоналями. Две диагонали AB и CD, где AC и BD не пересекаются, параллельны тогда и только тогда, когда между A и C, B и D содержится равное число сторон, то есть положительная разность номеров A и C равна положительной разности номеров B и D. Несложно заметить, что любая нечётная диагональ параллельна одной из девяти сторон 18-ти угольника, а любая чётная – одной из девяти диагоналей, отсекающих от 18-ти угольника треугольник (две стороны которого являются сторонами многоугольника). Всего имеется 18 семейств диагоналей, любые две диагонали одного семейства параллельны, а любые две диагонали разных семейств – не параллельны. Девять из этих семейств содержат чётные диагонали и девять – нечётные. В качестве представителей нечётных семейств можно взять стороны с концами 12 23,…,89,9 10 и диагонали 13, 24,…, 8 10, 9 11. Значит, треугольники с попарно непараллельными сторонами, построенные на вершинах правильного 18-угольника, не могут использовать больше, чем по одной из каждого семейства этих диагоналей, и общее число этих треугольников не превосходит 18:3=6. Более того, произвольный треугольник, построенный на трёх вершинах 18-ти угольника, может содержать либо три чётных диагонали, либо одну чётную и две нечётных, так как сумма чётностей трёх его сторон равна чётности числа 18. Следовательно, общее число нечётных сторон в любом множестве треугольников с попарно непараллельными сторонами должно быть чётным, и мы не сможем использовать для их сторон все 18 семейств диагоналей. Таким образом, число треугольников с попарно непараллельными сторонами, построенных на вершинах правильного 18-угольника, не превосходит пяти.
Пример. Пять треугольников с вершинами {1,2,3}, {3,4,5}, {5,6,7}, {7,8,9}, {1,5,9}.

Критерии проверки. Показано, что есть 18 попарно непараллельных семейств диагоналей: 2 балла: Показано, что все 9 непараллельных нечётных диагоналей не могут быть использованы как стороны треугольников: 2 балла. Пример: 2 балла. Обоснование примера: 1 балл.

9.5. Укажите любой способ расстановки всех натуральных чисел от 1 до 100 включительно в ряд в некотором порядке так, чтобы сумма любых n из них, стоящих подряд, не делилась на n при всех $2 \le n \le 100$.
Решение. Запишем все числа от 1 до 100 слева направо по порядку: 1,2,3,4,...,99,100, разобъём на 50 пар соседних: 1 и 2, 3 и 4, …, 99 и 100, и в каждой паре числа поменяем местами: 2,1,4,3,...,100,99. Докажем, что полученная перестановка удовлетворяет условию задачи.
а) Заметим, что в полученной перестановке каждое число на нечётном месте на 1 больше номера своего места, а на чётном — на 1 меньше. В частности, отсюда следует, что сумма любых двух соседних чисел в перестановке равна сумме номеров их мест. То же относится и к сумме любого чётного числа идущих подряд чисел из перестановки.

б) Заметим также, что сумма чётного числа последовательных натуральных чисел не делится на их количество, а сумма нечётного числа последовательных натуральных чисел делится на их количество. Действительно, найдём сумму n последовательных чисел, первое из которых равно $a+1$, получим $a+1+a+2+...+a+n=na+\frac{n(n+1)}{2}$ - тут первое слагаемое всегда делится на n, а второе, только когда $n+1$ чётно.
в) Если из переставленных чисел выбрать чётное число идущих подряд, то в силу замечания а) их сумма равна сумме номеров их мест и не делится на их количество в силу б). Если же из переставленных чисел выбрать нечётное число идущих подряд, то в силу замечания а) несложно заметить, что их сумма на 1 больше или меньше суммы номеров их мест, которая делится на их количество в силу б). Значит, сумма самих чисел не может делится на их количество.
Критерии проверки. Предъявлен пример с проверкой для какого-то достаточно большого количества, не меньше 10, (но не 100) первых натуральных чисел: 1 балл. Примеры без проверок для 100 чисел, кроме легко проверяемых: 0 баллов.

10 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

10.1. Решить в действительных числах систему уравнений: $x^3+y=2x, y^3+x=2y$.

Ответ. $(0,0), \pm(1,1), \pm(\sqrt{3},-\sqrt{3})$ - всего 5 решений.

Решение. Рассмотрим случаи.
1) $x=y$, тогда $x^3=x=y$, откуда $(x,y)=(0,0),\pm(1,1)$- первые три решения.
2) $x=-y$, тогда $x^3=3x=-y$, откуда $(x,y)=(0,0),\pm(\sqrt{3},-\sqrt{3})$- первое и два последних решения.(Шутка – дальше можно не решать)
3) $x\neq\pm y$ и $x,y\neq 0$. Вычтем из первого второе уравнение и разделим на $x-y$, получим $x^2+xy+y^2=3$. Сложим первое и второе уравнение и разделим на $x+y$, получим $x^2-xy+y^2=1$. Следовательно, $x^2+y^2=2, x+y=1$, откуда $x^2+y^2-2xy=0$, то есть $x=y$, что в данном случае невозможно. Новых решений не получается

Критерии проверки. Угаданы с проверкой все решения: 1 балл. Рассмотрены первые два случая: по 1 баллу за каждый. Потеряна часть решений: снимаем от1 до 4 баллов

10.2. Трое играют в настольный теннис, причем игрок, проигравший партию, уступает место игроку, не участвовавшему в ней. В итоге оказалось, что первый игрок сыграл 21 партию, а второй – 10. Сколько партий сыграл третий игрок?.

Ответ. 11.

Решение. По условию, первый игрок сыграл 21 партию, поэтому всего было сыграно не менее 21 партии. Из каждых двух партий подряд второй игрок хотя бы в одной должен участвовать, значит, партий было не более $2\cdot 10+1=21$. Следовательно, была сыграна всего 21 партия, и первый игрок участвовал в каждой из них. В 10 партиях он встречался со вторым, а в оставшихся 11 партиях – с третьим. Пример такого турнира: первый игрок встречается со вторым в партиях с чётными номерами, а с третьим – в партиях с нечётными номерами.

Критерии проверки. Если ответ угадан и приведён пример турнира: 1 балл. Присутствует замечание, что из каждых двух партий подряд второй игрок хотя бы в одной должен участвовать: 2 балла. Не приведён пример турнира: минус 1 балл.

10.3. В четырёхугольнике ABCD равные диагонали AC и BD пересекаются в точке O, а точки P и Q –середины сторон AB и CD соответственно. Докажите, что биссектриса угла AOD перпендикулярна отрезку PQ.

Доказательство. Отложим от точки B отрезок BE, равный и параллельный диагонали AC.

Тогда четырёхугольник AEBC является параллелограммом, сторона AB – одной его диагональю, а отрезок EC – другой, следовательно, точка P является также серединой отрезка EC. Поэтому PQ является средней линией треугольника ECD и параллелен его стороне ED. Ввиду параллельности сторон углов AOD и EBD, их биссектрисы также параллельны. Треугольник EBD является равнобедренным, следовательно, биссектриса угла EBD при его вершине, перпендикулярна основанию ED. Значит, биссектриса угла AOD перпендикулярна отрезку PQ.

Критерии проверки. Сделано дополнительное построение, ведущее к решению: 1 балл.

10.4. Назовём *змейкой* в выпуклом n-угольнике незамкнутую, не самопересекающуюся ломаную из $n-1$звеньев, множество вершин которой совпадает с множеством всех вершин n-угольника. Найти число различных змеек в n-угольнике. (Змейки равны, если совпадают, как геометрические места точек. Например, число змеек в треугольнике равно 3)

Ответ. $n\cdot 2^{n-3}$.

Решение. 1) Докажем по индукции, что число змеек, одним из концов которых является фиксированная вершина A, равно 2^{n-2}. База при $n=3$очевидна. Для произвольного n, имеем две возможности для звена с концом A – это стороны AB и AC n-угольника, где B и C – соседние с A вершины. Если первое звено AX отлично от AB и AC, то диагональ AX делит n-угольник на два невырожденных многоугольника с более, чем тремя вершинами в каждом, считая A и X. Тогда второе звено змейки и все следующие, ввиду её несамопересекаемости, будут лежать в одном из них и не смогут содержать вершину другого, отличную от A и X, что противоречит условию. Пусть первым звеном является AB, тогда оставшиеся $n-2$ звена змейки являются змейкой с началом B в $n-1$- угольнике, получающемся из исходного удалением треугольника ABC. По индукционному предположению, таких змеек будет 2^{n-3} - это в точности все змейки с крайним звеном AB. Аналогично, змеек с крайним звеном AC тоже будет 2^{n-3}, поэтому общее число змеек, одним из концов которых является A, будет 2^{n-2}

2) Теперь умножим 2^{n-2} на число вершин n и поделим пополам, так, как каждую змейку мы подсчитали дважды – с каждого из её концов – всего $n\cdot 2^{n-3}$ змейки.

Критерии проверки. Отсутствие деления пополам: минус 2 балла. Отсутствие обоснования того, что при выборе следующего звена змейки есть только две возможности из «соседних» вершин: минус 2 балла.

10.5. На доске написаны 10 натуральных чисел, среди которых могут быть равные, причём квадрат каждого из них делит сумму всех остальных. Какое наибольшее количество различных чисел может быть среди выписанных?

Ответ. Четыре.

Решение. Пример для четырёх различных чисел: 1,1,1,2,2,3,5,5,5,5.

Пусть среди выписанных чисел ровно $n\ge 2$ различных, максимальное из которых мы обозначим за x, а сумму всех чисел — за S. Тогда сумма всех чисел, кроме максимального, не превосходит $(9-n)x+x-1+x-2+...+x-(n-1)=9\text{x}-\dfrac{n(n-1)}{2}$, что не меньше x^2, так как делится на него. Следовательно, неравенство $x^2-9\text{x}+\dfrac{n(n-1)}{2}\le 0$ - имеет решения в натуральных числах, и $\dfrac{9-\sqrt{81-2\text{n}(n-1)}}{2}\le x\le\dfrac{9+\sqrt{81-2\text{n}(n-1)}}{2}$. Положительность дискриминанта даёт нам $n\le 6$, и $x\le 8$, $S-x\le 72-1=71$. Рассмотрим случаи каждого максимального числа отдельно.

а) $x=8$, тогда $S-x\le 71$ и делится на 64, поэтому S=72. Тогда $72-k$ делится на $k^2, k\le 7$

только при $k=1$, поэтому в данном случае $n \le 2$.
б) $x=7$, тогда $S-x \le 62$ и делится на 49, поэтому S=56. Тогда $56-k$ делится на $k^2, k \le 6$ только при $k=1$, поэтому и в данном случае $n \le 2$.
в) $x=6$, тогда $S-x \le 53$ и делится на 36, поэтому S=42. Тогда $42-k$ делится на $k^2, k \le 5$ только при $k=1,2$, поэтому в данном случае $n \le 3$.
г) $x=5$, тогда $S-x \le 44$ и делится на 25, поэтому S=30. Тогда $30-k$ делится на $k^2, k \le 4$ при $k=1,2,3$, поэтому в данном случае $n \le 4$. Искомое множество должно содержать 10 натуральных чисел с суммой 30, среди которых должны быть 1,2,3,5. Теперь уже несложно построить пример для $n=4$: 1,1,1,2,2,3,5,5,5,5. Этот пример не единственный.

Критерии проверки. Доказано, что $n \le 4$: 5 баллов. Пример для $n=4$: 2 балла. Оценка $n \le 6$: 2 балла.

11 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

11.1. Могут ли при каком-то значении x оба числа $\cos x + \sqrt{2}$ и $\cos 2x + \sqrt{2}$ быть рациональными?
Ответ. Нет.
Решение. Обозначим эти числа за a и b соответственно. Тогда
$b-\sqrt{2} = 2\left(a-\sqrt{2}\right)^2 - 1 = 2a^2 + 3 - 4a\sqrt{2}$, откуда $b - 2a^2 - 3 = (1-4a)\sqrt{2}$. В силу рациональности a и b последнее равенство возможно только при $1-4a=0$, откуда $a=\frac{1}{4}$, однако при этом $\cos x = \frac{1}{4} - \sqrt{2} < -1$, что невозможно.
Критерии проверки.
11.2. Решить в действительных числах систему уравнений :
$x^2+xy+y^2=4, x^4+x^2y^2+y^4=8$
Ответ. $\pm\left(\sqrt{\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}}, \sqrt{\frac{3\mp\sqrt{5}}{2}}\right)$ - всего 4 решения.
Решение. Рассмотрим случаи.
1) $x=y$, тогда $3x^2=4, 3x^4=8$, откуда $x^2=2$, что явно не удовлетворяет обоим уравнениям. Решений нет.
2) $x=-y$, тогда $x^2=4, 3x^4=8$, откуда $x^2=\frac{2}{3}$ что тоже явно не удовлетворяет обоим уравнениям. Решений нет.
3) $x \ne \pm y$. Домножим первое уравнение на $x-y$. получим $x^3-y^3=4(x-y)$. Домножим второе уравнение на x^2-y^2, получим: $x^6-y^6=8\left(x^2-y^2\right)$. Поделим второе уравнение на первое, получим $x^3+y^3=2(x+y)$, откуда $x^2-xy+y^2=2$. С учётом первого уравнения, $xy=1, x^2$ 义 $y^2=3$. Заменяя $y=\frac{1}{x}$, получаем биквадратное уравнение $x^4-3x^2+1=0$, откуда
$x=\pm\sqrt{\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}}, y=\pm\sqrt{\frac{3\mp\sqrt{5}}{2}}$ - всего 4 решения.
Критерии оценивания. Потеря части решений или приобретение лишних решений: минус 2-3 балла, в зависимости от числа потерянных/приобретённых.

11.3. Внутри остроугольного треугольника ABC выбрали точку P, отличную от O— центра описанной окружности треугольника ABC, и такую, что угол PAC равен углу PBA и угол PAB равен углу PCA. Доказать, что угол APO — прямой.

Доказательство. Обозначим величины углов PAC и PBA за a, а величины углов PAB и PCA — за b. Тогда величина угла BAC равна $a+b$, а величина угла BPC равна $360-2(180-a-b)=2(a+b)$, то есть удвоенной величине BAC. Ровно такую же величину имеет и угол BOC — центральный в описанной окружности треугольника ABC, соответствующий вписанному углу BAC. Следовательно, четыре точки B,O,P,C лежат на одной окружности S. Точка O попадает тогда в один из треугольников PAB или PAC, можно считать, в треугольник APB, так как не может лежать в треугольнике BPC или на его сторонах, тогда угол BOC был бы больше угла BPC. Величина угла APO в этом случае равна разности углов APB и OPB, который равен углу OCB, как вписанный в S, опирающийся на ту же хорду OB.

Величина APB очевидно равна $180-a-b$, величина OCB, как угла при основании равнобедренного треугольника OCB с углом $2(a+b)$ при вершине O, равна $90-a-b$

Считаем их разность: $180-a-b-(90-a-b)=90$ - угол APO действительно прямой.

Критерии оценивания. Доказано, что четыре точки B,O,P,C лежат на одной окружности: 2 балла. Обоснование того, что точка O попадает тогда в один из треугольников PAB или PAC, как условие правильности счёта угла APO: 2 балла. Замечание, что угол OPB равен углу OCB как вписанный: 2 балла. Подсчёт величины угла OCB: 1 балл.

11.4. Доказать, что рёбра произвольного тетраэдра (треугольной пирамиды) можно разбить некоторым образом на три пары так, что существует треугольник, длины сторон которого равны суммам длин рёбер тетраэдра в этих парах.

Доказательство. Обозначим вершины тетраэдра через ABCD, разобьём его рёбра на пары противоположных: {AB,CD},{AC,BD},{AD,BC}. Из неравенства треугольника следует: AB+AC>BC,DB+DC>BC,AC+CD>AD,AB+BD>AD. Сложив все неравенства и поделив пополам, получим: AC+CD+BD+AB=(AC+BD)+(AB+CD)>AD+BC, то есть, что сумма длин любой пары противоположных рёбер меньше суммы двух других аналогичных сумм. Из неравенства треугольника следует существование искомого в условии треугольника.

Критерии проверки.

11.5. Найти все натуральные n, для которых все натуральные числа от 1 до n включительно можно записать в ряд в таком порядке, что сумма первых слева k чисел будет либо делить сумму всех $n-k$ оставшихся, либо делиться на неё при любом k от 1 до $n-1$.

Ответ. $n=3,4,5$.

Решение. Примеры для этих чисел: {1,2,3},{1,4,3,2},{1,4,5,2,3}.

Пусть $a_1,a_2,...,a_n$ - все числа от 1 до n, записанные в требуемом в условии порядке. Обозначим их сумму за S, и рассмотрим максимальное k такое, что $A_k=a_1+a_2+...+a_k$ не превосходит $\frac{S}{2}$.

а) $A_k<\frac{S}{2}$. Тогда числа A_k и $B_k=a_{k+2}+...+a_n=S-A_k-a_{k+1}$ являются собственными делителями числа S, меньшими $\frac{S}{2}$, значит оба они не больше $\frac{S}{3}$. Следовательно, $a_{k+1}=S-A_k-B_k\geq S-2\frac{S}{3}=\frac{S}{3}$, откуда $\frac{S}{3}=\frac{n(n+1)}{6}\leq a_{k+1}\leq n$ и $n\leq 5$.

б) $A_k=\frac{S}{2}$. Тогда числа $A_{k-1}=a_1+a_2+...+a_{k-1}=\frac{S}{2}-a_k$ и $B_k=a_{k+2}+...+a_n=\frac{S}{2}-a_{k+1}$

являются различными собственными делителями числа S, меньшими $\frac{S}{2}$, значит одно из них не больше $\frac{S}{4}$, можно считать, $A_{k-1} \le \frac{S}{4}$. Тогда $a_k = \frac{S}{2} - A_{k-1} \ge \frac{S}{4}$, откуда $\frac{S}{4} = \frac{n(n+1)}{8} \le a_k \le n$ и $n \le 7$. Более того, при $n = 6$ случай б) невозможен из-за нечётности S. При $n = 7$ число S не делится на 3, поэтому один из делителей A_{k-1} и B_k не превосходит $\frac{S}{5}$, что позволяет улучшить оценку: $\frac{S}{2} - \frac{S}{5} = \frac{3S}{10} = \frac{3n(n+1)}{20} \le a_k \le n$, откуда $n \le \frac{20}{3} - 1 = \frac{17}{3}$ и $n \le 5$.

Критерии проверки.: Нахождение примеров для всех $n = 3,4,5$: 1 балл. Оценка $n \le 7$: 3 балла. Оценка $n \le 5$: 6 баллов.