Всесибирская открытая олимпиада школьников 2016-2017 г.г. по математике
Второй этап
7 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

7.1. По кругу в каком-то порядке расставлены числа от 1 до 9. Может ли оказаться, что сумма любых двух идущих подряд чисел делится хотя бы на одно из чисел 2 и 9?

7.2. На доске был нарисован квадрат со стороной 100 см. Алексей пересёк его двумя прямыми, параллельными одной паре сторон квадрата. После этого Данил пересёк квадрат двумя прямыми, параллельными другой паре сторон квадрата. В итоге квадрат разбился на 9 прямоугольников, и оказалось, что длины сторон центрального участка равны 40 см и 60 см. Найдите сумму площадей угловых прямоугольников.

7.3. В подъезде Лера ездит на лифте, а Лада спускается пешком (скорости лифта и Лады постоянны). Однажды, когда они спускались с 4-го этажа на 1-ый, Лада оказалась быстрей, и некоторое время ждала Леру внизу. В другой раз девочки спускались с 8 этажа, и Лада увеличила свою скорость вдвое, из-за чего прождала внизу в три раза больше, чем в первый раз. Во сколько раз первоначальная скорость Лады больше скорости лифта?

7.4. На квадратной доске со стороной 2017 в левом нижнем углу стоит шахматный слон. Алексей и Данил по очереди ходят этим слоном, первый ходит Алексей, причём игрокам запрещается ходить в клетки, в которых слон уже был (слон ходит по диагонали на любое расстояние). Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из мальчиков может гарантировать себе выигрыш вне зависимости от действий соперника?

7.5. Егор, Никита и Иннокентий по очереди играли в шахматы друг с другом (двое играют, один смотрит). Причём, после каждой партии проигравший уступал место за доской зрителю (ничьих не было). В итоге оказалось, что Егор участвовал в 13 партиях, а Никита – в 27. Сколько партий сыграл Иннокентий?

8 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

8.1. По кругу в каком-то порядке расставлены числа от 1 до 2017. Может ли оказаться, что сумма любых трёх чисел, стоящих подряд, делится на 2?

8.2. В треугольнике ABC угол A в два раза меньше угла C, а точка D на стороне AC является основанием высоты, проведённой из B. Докажите, что разность отрезков, на которые D делит AC, равна одной из сторон треугольника ABC.

8.3. Между городами Дзержинск и Львов проложено теплоходное сообщение. Каждую полночь из Дзержинска выходит теплоход, который ровно через восемь суток прибывает во Львов. Сколько теплоходов встретит пароход “Раритет” на своём пути в Дзержинск, если он выйдет из Львова ровно в полночь и потратит на путь всё те же восемь суток?

8.4. На квадратной доске со стороной N, где N — некоторое натуральное число, в левом нижнем углу стоит шахматный слон. Алексей и Данил по очереди ходят этим слоном, первый ходит Алексей, причём игрокам запрещается ходить в клетки, в которых слон уже был (слон ходит по диагонали на любое расстояние). Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из мальчиков может гарантировать себе выигрыш вне зависимости от действий соперника?

8.5. Егор, Никита и Иннокентий по очереди играли в шахматы друг с другом (двое играют, один смотрит). Причём, после каждой партии проигравший уступал место за доской зрителю (ничьих не было). В итоге оказалось, что Егор участвовал в 13 партиях, а Никита – в 27. Сколько партий сыграл Иннокентий?

9 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

9.1. Купец купил в Твери несколько мешков соли и продал их в Москве с прибылью в 100 рублей. На все вырученные деньги он снова купил в Твери соль (по тверской цене) и продал в Москве (по московской цене). На этот раз прибыль составила 120 рублей. Сколько денег он потратил на первую покупку?

9.2. По окружности выписаны 10 чисел, сумма которых равна 100. Известно, что сумма каждых трех чисел, стоящих рядом, не меньше 29. Укажите такое наименьшее число A, что в любом наборе чисел, удовлетворяющем условию, каждое из чисел не превосходит A.

9.3. В четырёхугольнике $ABCD$ точки P,Q,R,S – середины сторон AB,BC,CD,DA соответственно, а T – точка пересечения отрезков PR и QS. Докажите, что сумма площадей четырёхугольников $APTS$ и $CRTQ$ равна половине площади четырёхугольника $ABCD$.

9.4. Найдите наименьшее натуральное число, в записи которого каждая цифра встречается ровно по одному разу и которое делится на 990.

9.5. Пусть M – конечное множество различных чисел . Известно, что среди любых трех его элементов найдутся два, сумма которых принадлежит M. Какое наибольшее число элементов может быть в M?

10 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

10.1. Шестнадцать рыбаков, разбитых на три группы, вместе поймали 113 рыб. Каждый рыбак первой группы поймал по 13 рыб, второй — по 5 рыб, третьей — по 4 рыбы. Сколько рыбаков в каждой группе?

10.2. Найдите наибольшее натуральное число, делящееся на 990, в записи которого каждая цифра встречается ровно по одному разу.

10.3. В окружность вписан четырёхугольник $ABCD$. Докажите, что точки пересечения медиан треугольников ABC, BCD,CDA и DAB лежат на одной окружности.

10.4. Найти все множества из четырёх действительных чисел таких, что каждое число в сумме с произведением трёх остальных равно 2.

10.5. В каждой клетке таблицы 5 на 5 записано по одной букве так, что в любой строке и в любом столбце не больше трёх различных букв. Какое наибольшее число различных букв может быть в такой таблице?

11 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

11.1. Найти все целые положительные решения уравнения $(n+2)!-(n+1)!-n!=n^2+n^4$.

11.2. Какое из чисел больше, $2^{\sqrt{\log_3 2}}$ или $3^{\sqrt{\log_2 3}}$?

11.3. Квадрат со стороной 4 см разделён тремя параллельными горизонтальными и тремя параллельными вертикальными линиями на 16 квадратиков со стороной 1 см. Стороны этих квадратиков, включая и те, которые расположены на границе большого квадрата, будем называть *единичными отрезками*. Сколькими способами можно задать на каждом из единичных отрезков ориентацию так, чтобы общая сумма всех полученных единичных векторов была равна 0? Ответ можно дать в виде формулы, не обязательно доводить его до числа.

11.4. Пусть O — точка пересечения диагоналей выпуклого четырёхугольника *ABCD*, а *P*, *Q*, *R*, *S* - точки пересечения медиан треугольников *AOB, BOC, COD* и *DOA* соответственно. Найти отношение площадей четырёхугольников *PQRS* и *ABCD*.

11.5. Алфавит состоит из n букв. Слово, составленное из этих букв, называется *разрешённым*, если все стоящие в нём рядом буквы различны и из него нельзя вычёркиванием букв получить слово вида $abab$, где буквы a и b различны. Какую максимальную длину может иметь разрешённое слово?