Всесибирская открытая олимпиада школьников по математике 2021-2022 гг

Первый этап **11 класс**

Время написания работы 4 астрономических часа *Каждая задача оценивается в 7 баллов*

11.1. Пусть x, y - действительные числа такие, что оба числа $x+\frac{1}{y}, y+\frac{1}{x}$ рациональны. Докажите, что тогда и число $x^2y^2+\frac{1}{x^2y^2}$ тоже рационально.

11.2. Последовательность действительных чисел $a_n, n=1,2,3,...$ такова, что $a_{n+1}=a_n+\sqrt{a_n+a_{n+1}}, n=1,2,3,...$ и $a_1=1$. Найдите явную формулу, выражающую число a_n через n.

11.3. В какое максимальное число цветов нужно окрасить все клетки квадрата 4 на 4 так, чтобы для каждой пары различных цветов нашлись две клетки этих цветов, находящиеся либо в одной строке, либо в одном столбце квадрата?

11.4. Обозначим за P основание высоты остроугольного треугольника ABC, опущенной из вершины B, а за M – точку, зеркально симметричную P относительно средней линии треугольника, параллельной его стороне BC. Доказать, что прямая BM проходит через центр описанной окружности треугольника ABC.

11.5. Найти все натуральные числа a такие, что произведение $n(n+a)$ не является квадратом натурального числа ни при каком натуральном n.

Всесибирская открытая олимпиада школьников по математике 2021-2022 гг

Первый этап **11 класс**

Время написания работы 4 астрономических часа *Каждая задача оценивается в 7 баллов*

11.1. Пусть x, y - действительные числа такие, что оба числа $x+\frac{1}{y}, y+\frac{1}{x}$ рациональны. Докажите, что тогда и число $x^2y^2+\frac{1}{x^2y^2}$ тоже рационально.

11.2. Последовательность действительных чисел $a_n, n=1,2,3,...$ такова, что $a_{n+1}=a_n+\sqrt{a_n+a_{n+1}}, n=1,2,3,...$ и $a_1=1$. Найдите явную формулу, выражающую число a_n через n.

11.3. В какое максимальное число цветов нужно окрасить все клетки квадрата 4 на 4 так, чтобы для каждой пары различных цветов нашлись две клетки этих цветов, находящиеся либо в одной строке, либо в одном столбце квадрата?

11.4. Обозначим за P основание высоты остроугольного треугольника ABC, опущенной из вершины B, а за M – точку, зеркально симметричную P относительно средней линии треугольника, параллельной его стороне BC. Доказать, что прямая BM проходит через центр описанной окружности треугольника ABC.

11.5. Найти все натуральные числа a такие, что произведение $n(n+a)$ не является квадратом натурального числа ни при каком натуральном n.