10 класс

Все задачи оцениваются из 7 баллов. Каждое верное решение, вне зависимости от длины и степени красивости, оценивается в 7 баллов

10.1. Отрезок *AB* точками *P* и *M* разбит на три отрезка *AP, PM* и *MB*, из которых можно составить треугольник. Найти все точки *X*, лежащие внутри отрезка *PM* для произвольного такого разбиения.

Ответ. Середина отрезка AB.

Решение. В силу неравенства треугольника AP+PM>MB, поэтому AP+PM больше половины длины AB, следовательно точка M всегда лежит правее середины отрезка AB. Аналогично, PM+MB>AP, поэтому PM+MB больше половины длины AB, следовательно точка P всегда лежит левее середины отрезка AB. Значит, середина O отрезка AB всегда лежит строго между точками P и M, то есть принадлежит внутренности отрезка PM для любого разбиения AB точками P и M из условия.

Докажем, что больше таких точек нет. Рассмотрим произвольную внутреннюю точку X отрезка AB, отличную от его середины O, не умаляя общности считаем, что X лежит между A и O. Обозначим за P середину отрезка OX, а за M – точку, симметричную P относительно O. Тогда длина PM меньше половины длины AB, длины AP и MB равны и их сумма больше половины AB, следовательно AP+MB больше PM. Значит, из отрезков AP, PM и MB можно составить равнобедренный треугольник, и мы построили «треугольное» разбиение AB, в котором точка X не лежит в отрезке PM.

Другой способ выбора точек P и M для X. За P возьмём середину OX, а за M – середину PB. Тогда длины PM и MB равны и их сумма больше половины AB и больше AP, следовательно, из отрезков AP, PM и MB можно составить равнобедренный треугольник, и мы построили «треугольное» разбиение AB, в котором точка X не лежит в отрезке PM.

Критерии проверки. (●) Доказательство того, что середина AB всегда лежит внутри PM: 3 балла. (●) Доказательство того, все остальные точки не всегда лежит внутри PM: 4 балла. (●) Если строится пример, когда X совпадает с P или M, скажем, P=X, а M-середина PB: снимаем 2 балла, так как в условии X должна быть внутренней точкой отрезка PM.

10.2. Найти все тройки действительных чисел a, b, c, удовлетворяющих системе уравнений: $\begin{cases} ab - c = 3, \\ a + bc = 4, \\ a^2 + c^2 = 5. \end{cases}$

Ответ. $a = 2, b = 2, c = 1$ и $a = -\frac{2}{5}, b = -2, c = -\frac{11}{5}$.

Решение. Возведём в квадрат левые части первого и второго уравнений и сложим их, получим $(ab - c)^2 + (a + bc)^2 = a^2b^2 - 2abc + c^2 + a^2 + 2abc + b^2c^2 = (b^2 + 1)(a^2 + c^2) = 5(b^2 + 1) = 3^2 + 4^2 = 25$, откуда $b = \pm 2$.

1) $b = 2$. Тогда из первого уравнения $c = 2a - 3$, подставим это в третье уравнение, получим $5a^2 - 12a + 4 = 0$, откуда $a = \frac{12 \pm \sqrt{64}}{10} = 2; \frac{2}{5}$. В этом случае получаем два кандидата в решения: $a = 2, b = 2, c = 1$ и: $a = \frac{2}{5}, b = 2, c = -\frac{11}{5}$. Первая тройка второму уравнению удовлетворяет, а при подстановке второй во второе уравнение, получим в левой части -4, и это постороннее решение.

2) $b = -2$. Тогда из первого уравнения $c = -2a - 3$, подставим это в третье уравнение, получим $5a^2 + 12a + 4 = 0$, откуда $a = \frac{-12 \pm \sqrt{64}}{10} = -2; -\frac{2}{5}$. В этом случае получаем два кандидата в решения: $a = -2, b = -2, c = 1$ и: $a = -\frac{2}{5}, b = -2, c = -\frac{11}{5}$. Вторая тройка второму уравнению удовлетворяет, но, при подстановке первой во второе уравнение, получим в левой части -4, и это постороннее решение.

Замечание. Вместо возни с квадратным уравнением проще подставить выражение $b = \pm 2$ в два первых уравнения, получить систему из двух линейных уравнений и найти соответствующие a, c.

Критерии проверки. (●) Угаданы верные ответы: по 1 баллу за каждый. (●) Получение $b = \pm 2$: 3 балла. (●) Рассмотрение каждого из случаев $b = 2$ и $b = -2$: по 2 балла за каждый. (●) Приобретение посторонних решений: снимаем по 2 балла за каждое.

10.3. В равнобедренном треугольнике с основанием *AC* и углом *ABC=20*° при вершине *B*, на стороне *AB* отмечена точка *H* такая, что угол *AHC=30*°. Доказать *AC=BH*.

Доказательство 1. Построим серединный перпендикуляр к отрезку CH, обозначим за M и K точки его пересечения со сторонами BC и AB соответственно. Треугольник HMC равнобедренный с углами MHC=MCH=10° при основании HC, поэтому отрезки MH и MC равны, как его боковые стороны. В треугольнике MHB угол BHM равен разности углов BHC= 150° и MHC=10°, поэтому BHM равен 140°. В том же треугольнике угол HBM равен 20°, поэтому угол BMH=20° = HBM, значит треугольник MHB равнобедренный с боковыми сторонами BH и HM. Следовательно, BH=HM=MC.

Теперь обратимся к равнобедренному треугольнику CHK с равными углами при основании HCK=CHK=30° , следовательно, угол MCK равен сумме MCH=30° и MCK=10°, то есть 40°. Значит, и угол KCA, равный разности углов ACB=80° и MCK=40°, то есть тоже 40°. В частности, это значит, что CK – биссектриса угла BCA. Угол KMC равен половине угла CMH=160°, то есть 80° и равен углу KAC=80°. Отсюда следует, что треугольники KMC и KAC равны по общей стороне KC и равным углам KMC=KAC и KCA=MCK, следовательно, равны их соответствующие стороны MC=AC. Последнее завершает доказательство равенства BH=HM=MC=AC. Согласитесь, это нормальный способ решения данной задачи.

Доказательство 2. Повернём треугольник ABC вокруг точки B по часовой стрелке на 20°, чтобы сторона AC совместилось со стороной AB. Образ точки H при этом повороте обозначим за F. Затем отразим треугольник ABC зеркально относительно стороны BC, образ точки H при этом отражении обозначим за G. При этом угол FAC=FAB+BAC=10° +80° = 90° и GCA=GCB+BCA=10° +80° = 90°, и FA=CH=GC, следовательно, четырёхугольник AFGC является прямоугольником и FG=AC. В треугольнике BFG по построению равны стороны BF=BH=BG, а угол FBG при его вершине B равен сумме углов FBA=ABC=20° и ABG=2·20° = 40°, то есть угол FBG=60°. Следовательно, треугольник BFG – равнобедренный с углом 60° при вершине, то есть равносторонний, поэтому AC=FG=FB=HB, что и требовалось доказать. Это, без сомнения, эстетский способ решения данной задачи.

Доказательство 3. В треугольнике ABC угол BAC равен $(180° - 20°):2 = 80°$, угол BHC равен $180° - 30° =150°$, а угол BCH равен $180° - 20° - 150° = 10°$. Запишем теорему синусов для треугольников ABC: $\frac{AC}{\sin 20°} = \frac{BC}{\sin 80°}$, и HBC: $\frac{BH}{\sin 10°} = \frac{BC}{\sin 150°} = \frac{BC}{\sin 30°}$. Тогда

$$AC = \frac{BC \cdot \sin 20°}{\sin 80°} = BH \cdot \frac{\sin 30° \cdot \sin 20°}{\sin 10° \cdot \sin 80°} = BH \cdot \frac{\sin 20°}{2 \cdot \sin 10° \cdot \cos 10°} = BH \cdot \frac{\sin 20°}{\sin 20°} = BH,$$

что и требовалось доказать. Нельзя не признать, что это - короткий способ решения данной задачи.

Критерии проверки. Для решения 1: (●) Идея рассмотрения серединного перпендикуляра к CH: 1 балл. (●) Равенство отрезков MH и MC: 1 балл. (●) Равенство BH и HM: 1 балл. (●) Равенство треугольников KMC и KAC: 3 балла. (●) Равенства BH=HM=MC=AC: 1 балл.

Для решения 2: (●) Идеи поворота и отражения: по 1 баллу за каждую. (●) Доказательство того, что четырёхугольник AFGC является прямоугольником и FG=AC: 2 балла. (●) Доказательство того, что треугольник BFG – равносторонний: 2 балла. (●) Вывод отсюда равенства AC=FG=FB=HB: 1 балл.

Для решения 3: (●) Верная запись соотношений теоремы синусов для двух треугольников ABC и HBC: 3 балла. Только для одного из них: 1 балл. (●) Получение отсюда выражения AC через BH с коэффициентом, записанным с помощью тригонометрических функций конкретных углов, но не приведённом явно к 1: ещё 1 балл. (●) Доказательство того, что этот коэффициент равен 1: 3 балла.

10.4. Найти все натуральные числа $n \geq 3$ такие, что для любого целого числа $m \geq 0$ существуют n целых чисел $x_1, \dots, x_n$ таких, что $x_1 + \dots + x_n = 0$ и $x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_{n-1}x_n + x_nx_1 = -m$. Среди чисел $x_1, \dots, x_n$ могут быть совпадающие.
Ответ. Все $n \geq 5$.

Решение. 1. Пусть сначала $n = 3$. Положим $x_1 = a, x_2 = b, x_3 = -a - b$, тогда сумма их попарных произведений равна $ab - b(a+b) - a(a+b) = -a^2 - b^2 - ab = -m$, то есть $m = a^2 + b^2 + ab = (a-b)^2 + 3ab$. Из последнего равенства следует, что остаток от деления числа m на 3 совпадает с остатком от деления $(a-b)^2$, который может быть равен только 0 или 1. Следовательно, числа $-m$ для всех m, дающих при делении на 3 остаток 2, не могут быть представлены требуемым в условии образом, поэтому $n = 3$ не удовлетворяет условию. Можно просто перебрать все варианты остатков от деления чисел a и b на 3 с тем же эффектом.
2. Пусть $n = 4$. Положим $x_1 = a, x_2 = b, x_3 = c, x_4 = d = -a - b - c$. Тогда сумма их попарных произведений по циклу равна $ab + bc + cd + da = (a+c)(b+d) = -(a+c)^2 = -m$, то есть $m = (a+c)^2$. Следовательно, в требуемом в условии виде представляются только те числа $-m$, для которых m является точным квадратом, поэтому случай $n = 4$ тоже не удовлетворяет условию.
3. Пусть теперь $n \geq 5$. Для произвольного $m \geq 0$ рассмотрим n целых чисел $-m, 1, 0, m-1, 0, \dots, 0$. Их сумма равна 0, а сумма попарных произведений по циклу равна в точности $-m$, следовательно, любое $n \geq 5$ удовлетворяет условию задачи.

Критерии проверки. (●) Доказано, что $n = 3$ не удовлетворяет условию: 2 балла. (●) Доказано, что $n = 4$ не удовлетворяет условию: 2 балла. (●) Доказано, что любое $n \geq 5$ удовлетворяет условию задачи: 3 балла.

10.5. По кругу в некотором порядке выписаны все натуральные числа от 1 до 100 включительно. Пара не соседних чисел a и b называется *хорошей*, если все числа, выписанные по одну из сторон от хорды, соединяющей a и b, меньше a и b. Какое количество хороших пар чисел может содержаться среди выписанных, в зависимости от порядка записи? Найти все возможные значения.
Ответ. 97.

Решение 1. Доказать ответ проще, чем додуматься до него, и осознать, что он единственный. Например, если записать числа от 1 до n по часовой стрелке, то хорошими будут все пары, содержащие число n, кроме пар $(n, 1)$ и $(n, n-1)$ соседних с n чисел, всего $n - 3$ пары.

Докажем индукцией по n, что, если по кругу выписаны все натуральные числа от 1 до n, то, независимо от порядка записи, количество хороших пар всегда равно *n-3*.

База индукции *n=4.* Числа от 1 до 4 можно выписать по кругу четырьмя различными способами: (1234), (1243), (1324), (1423). Хорошими в них будут единственные пары, соответственно: .2.4, .2.3, .3.4, .4.3. При этом *n-3=4-3=1* – база индукции выполнена.

Шаг индукции. Пусть утверждение индукции выполнено для всех количеств чисел, от 4 до n, докажем утверждение для $n+1$. Рассмотрим выписанные в произвольном порядке все натуральные числа от 1 до $n+1$. Заметим, что ни одна хорошая пара чисел не содержит число 1, и пара чисел, записанных слева и справа от 1, образуют хорошую пару, назовём её *маленькой*. Теперь вычеркнем единицу, получим n выписанных чисел от 2 до $n+1$. Пары, которые были хорошим для исходных $n+1$ чисел, кроме маленькой, останутся хорошими и для полученных n чисел, верно и обратное. Количество хороших пар среди для полученных n чисел, по предположению индукции, равно $n+1-3=n-2$. Все эти пары останутся хорошими, если вернуть назад вычеркнутую единицу, и ещё к ним добавится новая пара чисел, соседних слева и справа от 1, то есть маленькая. Всего получаем $n-2+1=n-1=n+1-3$ хороших пар, что и доказывает шаг индукции.

Решение 2. Рассмотрим произвольную запись по кругу в некотором порядке всех натуральных чисел от 1 до 100. Будем считать их расположенными в вершинах правильного 100-угольника, обозначим его С. Сначала докажем, что хорды, соответствующие двум разным хорошим парам чисел, не могут пересекаться по внутренним точкам. Рассмотрим две хороших пары чисел $a<b, c<d$, в которых все 4 числа различны, можно считать, что $a<c$. Если хорды, соответствующие этим парам, пересекаются по внутренней точке, то числа c и d лежат по разные стороны от хорды $a-b$ и оба больше a, что противоречит «хорошести» пары a, b.

Теперь предположим, что проведены хорды для всех хороших пар выписанных чисел. Как мы только что доказали, они не пересекаются по внутренним точкам, поэтому разбивают наш 100-угольник на несколько многоугольников с вершинами в вершинах 100-угольника. Если среди них есть многоугольник М с более, чем тремя вершинами, рассмотрим самое маленькое из чисел в вершинах М, обозначим его за x, соседние с ним в М числа обозначим за y и z. Рассмотрим возникающие при этом варианты расположения соответствующих им вершин в 100-угольнике С.

1) Все три числа y, x, z записаны в трёх последовательных вершинах С. Тогда хорда y-z будет новой хорошей хордой С, что противоречит предположению о том, что все хорошие хорды уже проведены.

2) Одна из пар x, y и x, z является хорошей в С, а вторая образует пару соседних вершин С. Можно считать, что хорошей является пара x, y . Ввиду неравенства $x<z$, все числа, лежащие в С от хорды $x-y$ с другой, по сравнению с z, стороны, меньше x . Тогда хорда y-z снова будет не проведённой хорошей хордой С.

3) Обе пары x, y и x, z являются хорошими в С. В этом случае, ввиду неравенств $x<z, y<z$, маленькие числа для хорды $x-y$ лежат в С с другой, по сравнению с z, стороны, а маленькие числа для хорды $x-z$ лежат в С с другой, по сравнению с у, стороны. Следовательно, хорда $y-z$ будет непроведённой хорошей хордой 100-угольника, у которой маленькие числа расположены в С с той же стороны, что и x. При этом числа y, x, z записаны в трёх последовательных вершинах многоугольника М с более, чем тремя вершинами, поэтому $y-z$ не может быть стороной М, и тем более стороной С.

Таким образом, если хотя бы один из многоугольников, на которые разбивают 100-угольник хорошие хорды, не является треугольником, то всегда можно провести ещё одну хорошую хорду. Следовательно, все хорошие хорды разбивают 100-угольник на треугольники для любого порядка записи чисел от 1 до 100 в его вершинах. Сумма величин всех углов 100-угольника С равна $98 \cdot 180°$, в данной ситуации, когда все вершины треугольников лежат в вершинах С, она равна сумме углов во всех треугольниках разбиения. Сумма углов в каждом треугольнике разбиения равна $180°$, поэтому общее число треугольников разбиения равно 98. В общем числе $3 \cdot 98$ сторон всех треугольников разбиения каждая хорда учитывается дважды, а каждая сторона – один раз. Следовательно, количество проведённых хороших хорд равно $(3 \cdot 98-100): 2=97$ для любого порядка записи чисел от 1 до 100 в его вершинах.

Критерии проверки. Для первого решения: (●) Правильный подсчёт точного числа хороших пар чисел для произвольного n или $n=100$ для какого-нибудь частного примера: 1 балл. (●) Нерассмотрение базы индукции: минус 1 балл. (●) Идея рассмотрения минимального числа на кругу и соответствующей ему хорошей хорды: 1 балл. (●) Идея вычёркивания минимального числа и его хорошей хорды: 2 балла. (●) Доказательство однозначного соответствия хороших хорд до и после вычёркивания: 3 балла.

Для второго решения: (●) Доказательство того, что две хороших хорды не пересекаются: 2 балла. (●) Доказательство того, что, если среди многоугольников разбиения есть не треугольники, то можно добавить ещё одну хорошую хорду: 3 балла. (●) Нахождение числа треугольников для максимального разбиения хорошими хордами: 1 балл. (●) Нахождение количества ход в таком разбиении: 1 балл.