Решения и критерии проверки задач второго этапа
Всесибирской олимпиады школьников 2020-2021 г.г. по математике
8 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

8.1. Большие песочные часы отмеряют час, а маленькие – 11 минут. Как с помощью таких часов отмерить минуту?

Решение: Дважды подряд запустим большие песочные часы и одиннадцать раз подряд – маленькие. Минута будет отмерена между тем, как второй раз закончат работать первые часы (120 минут) и 11-й раз закончат работать маленькие (121 минута).

Критерии: Любой верный пример – 7 баллов.

8.2. Ученики 8 класса обменивались стикерами 31 декабря и 1 января. Оказалось, что 31 декабря каждый получил столько стикеров, сколько все остальные в сумме 1 января. Докажите, что все ученики получили поровну стикеров.

Решение: Пусть во второй день все ученики в сумме получили N стикеров. Рассмотрим какого-нибудь ученика; пусть он во второй день получил m стикеров. Тогда во второй день все остальные в сумме получили $N - m$ стикеров. Следовательно, в первый день этот участник получил $N - m$ стикеров, а значит, всего он получил $m + (N - m) = N$ стикеров. Итак, каждый ученик получил всего стикеров столько же, сколько и все ученики во второй день, то есть все ученики получили поровну стикеров.

Критерии: Разобранный частный случай – 1 балл.

Решение дано в общем виде, но под конец решения показано равенство стикеров у первого и второго ученика и не сказано, что так работает для всех остальных тоже – 5 баллов.

8.3. Имеются сломанные чашечные весы. Чаши весов находятся в равновесии, если вес на правой чаше равен утроенному весу на левой чаше. Правая чаша перевешивает, если вес на ней больше утроенного веса на левой чаше. Левая чаша перевешивает, если утроенный вес на ней больше веса на правой чаше. Как с помощью этих весов за два взвешивания найти фальшивую монету из 7 данных, если известно, что все 6 настоящих монет весят одинаково, а фальшивая легче остальных?

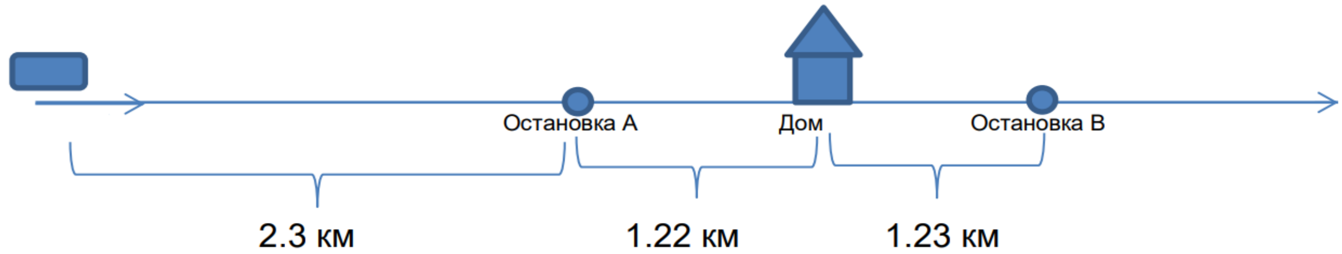
Решение: Пронумеруем монеты от 1 до 7 и при первом взвешивании положим на левую чашу монету 1, а на правую – 2, 3 и 4. Рассмотрим варианты:

1) Перевесила правая чаша. Тогда фальшивка под номером 1.
2) Перевесила левая чаша. Тогда фальшивка среди 2, 3 и 4. Положим теперь на левую чашу 2, а на правую – 3, 5 и 6
    a. Весы в равновесии. Тогда фальшивка номер 4.
    b. Перевесила правая чаша. Тогда фальшивка номер 2
    c. Перевесила левая. Тогда фальшивка номер 3.
3) Весы в равновесии. Тогда фальшивка среди 5, 6 и 7. Применим тот же алгоритм, что и в предыдущем пункте

Критерии: первое верное взвешивание без дальнейших продвижений — 0 баллов.
Пропущен случай равенства (или один из случаев неравенства), остальное верно — 3 балла.
Перепутаны чаши, остальное верно – минус 1 балл.
Потерян хотя бы 1 случай в переборе – не более 3 баллов.
Верное второе взвешивание, но не расписано как понять какая фальшивка – 4 балла.

8.4. Дан треугольник ABC с углом BAC, равным 30°. В этом треугольнике провели медиану BD, и оказалось, что угол BDC равен 45°. Найдите угол ABC.
Ответ: 45°
Решение: Проведём высоту CH. Тогда $HD = AD = CD$ как медиана к гипотенузе. Кроме того, $\angle HCD = \angle CHA - \angle HAC = 60°$, поэтому треугольник CHD равносторонний, откуда следует, что $\angle HDC = 60°$ (откуда, в частности, следует, что H лежит между A и B). Тогда $\angle HDB = \angle HDC - \angle BDC = 15°$. Кроме того, $\angle ABD = \angle BDC - \angle BAD = 15°$. Тогда треугольник HBD равнобедренный, и $HB = HD = HC$, откуда следует, что BHC равнобедренный прямоугольный, а значит, $\angle ABC = 45°$.
Критерии: Проведена высота CH – 1 балл.
Доказано дополнительно, что $\angle HDB = 15°$ - ещё 2 балла.
За отсутствие доказательства, что H лежит между A и B баллы не снимать.

8.5. В городе Омск построили метро, представляющее собой прямую линию. На этой же прямой расположен дом, в котором живут Никита и Егор. Каждое утро они одновременно выходят из дома на уроки, после чего Егор бежит к ближайшей станции метро со скоростью 12 км/ч, а Никита идёт вдоль линии метро к другой станции со скоростью 6 км/ч. Несмотря на это, каждый день Никита успевает к первому уроку, а Егор – нет, хотя нигде не задерживается. Найдите наибольшую возможную скорость поездов метро, если известно, что она постоянна и равна целому числу. (Считайте, что школа расположена прямо на некоторой станции метро, отличной от данных).
Ответ: 23 км/ч.
Решение: Очевидно, такое возможно, только если поезд метро сначала приезжает на ближайшую станцию A, куда побежал Егор, а затем едет к станции B, куда пошел Никита.
Пусть v – скорость метро, S – расстояние между двумя ближайшими станциями, R – расстояние между этим поездом метро и ближайшей станцией в тот момент, когда Никита и Егор одновременно выходят из дома.
Егор не успевает на метро, что означает $R/v < (S/2)/12$ (время, которое поезд тратит на проезд R, меньше, чем которое тратит Егор на пробег максимум $S/2$, так как это ближайшая к дому остановка).
Никита успевает, что означает $(R+S)/v > (S/2)/6$
Отсюда получаем: $Sv/12 – S < R < Sv/24$, следовательно, $v/12 – 1 < v/24$, значит, $v < 24$.
23 – наибольшее целое число, удовлетворяющее этому условию. Построим пример, в котором описанная ситуация возможна, если скорость метро равна 23 км/ч.



Метро до остановки А едет 2.3 км / 23км/ч = 1/10 ч. Егор при этом бежит 1.22 км / 12 км/ч > 1/10 ч и не успевает.
Метро до остановки В едет 4.75 км / 23км/ч = 4.75 / 23 ч. Никита идет к остановке В за 1.23 / 6 ч < 4.75 / 23 и успевает!

Критерии: Только оценка – 3 балла.
Только пример с полным обоснованием – 3 балла
За отсутствие обоснования в верном примере снимать 2 балла.