

Заключительный этап
Всесибирской Открытой Олимпиады Школьников по физике
13 марта 2022 г.
Задачи 9 класса
Возможные решения (максимум 10 баллов за задачу)

1. Жарким летним днем ребята катались по озеру на плотике из легкого пластика. Когда на плотике было трое ребят, то плотик погружался в воду наполовину, когда на нем стало двенадцать – он оказался почти полностью под водой. Во сколько раз пластик плотика легче воды? Считать, что все ребята одинакового веса.

Возможное решение

1) Обозначим плотность пластика ρ , а плотность воды $\rho_{ж}$.

Тогда масса плотика $M = \rho V$, где V – объем плотика. <1 балл >

2) Пусть масса одного ребёнка m .

Условие равновесия плотика с тремя ребятами при погружении на половину объёма:

$$3mg + \rho Vg - \rho_{ж} g \frac{V}{2} = 0 \quad <3 \text{ балла} >$$

3) Условие равновесия плотика с двенадцатью ребятами при почти полном погружении:

$$12mg + \rho Vg - \rho_{ж} gV = 0 \quad <3 \text{ балла} >$$

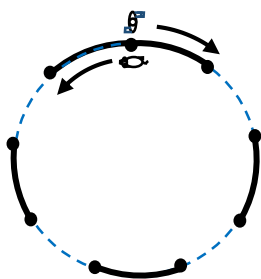
4) Умножая первое уравнение на 4 и вычитая из него второе, исключаем массу ребёнка:

$$3\rho Vg - \rho_{ж} gV = 0, \text{ откуда получаем ответ. } <3 \text{ балла} >$$

Ответ: $\rho_{ж}/\rho = 3$.

Разбалловка по этапам

	Этапы решения	Соотношения	Балл
1	Связь массы плотика с его плотностью и объемом.	$M = \rho V$	1
2	Условие равновесия плотика с тремя ребятами.	$3mg + \rho Vg - \rho_{ж} g \frac{V}{2} = 0$	3
3	Условие равновесия плотика с двенадцатью ребятами.	$12mg + \rho Vg - \rho_{ж} gV = 0$	3
4	Решение системы уравнений и получение ответа.	$3\rho Vg - \rho_{ж} gV = 0$ $\rho_{ж}/\rho = 3$	3



2. Круглый участок с периметром длиной $L = 90$ м окружен забором, который состоял из 9 одинаковых секций. Каждую четную секцию удалили. Однажды хозяин стал выгуливать собаку вдоль забора. У столба, находящегося между первой и последней секциями забора, он спустил собаку с поводка. Она пролезла через небольшую дыру в секции и побежала вдоль забора (с внутренней стороны) против часовой стрелки со скоростью $u = 4,8$ км/ч. Хозяин пошел (с внешней стороны забора) по часовой стрелке со скоростью $v = 4,2$ км/ч. Через какое время после старта хозяин впервые повстречается со своей собакой и возьмет ее на поводок?

Разницей длины замкнутого пути внутри и вне забора пренебречь. Ответ привести в минутах.

Возможное решение

1) Предположим, что хозяин до встречи прошел путь $S_1 = nL + x$, где $L = 90$ м – длина замкнутого пути вдоль забора, а его собака проделала $n + k$ замкнутых кругов, ее путь до встречи $S_2 = (n + k + 1)L - x$, <2 балла>

2) оба затратили одно и то же время t : $\frac{nL + x}{v} = \frac{(n + k + 1)L - x}{u}$. Подставив значения скорости, получим $x = \frac{4,2(1+k) - 0,6n}{9} L$. <3 балла>

3) Для того, чтобы хозяин нашел свою собаку, целая часть от деления x на длину секции l должна быть нечетным числом: $x/l = 4,2(1+k) - 0,6n$. При $n=0, k=0$, $x/l = 4,2$ целая часть $|x/l| = 4$, при $n=1, k=0$, $x/l = 3,6$, $|x/l| = 3$, условие удовлетворяется. <3 балла>

Пара $n=1, k=0$ подходит для условий задачи. Время, через которое собака пробежала бы на круг больше, чем прошел хозяин, можно найти из условия:

$ut_1 - vt_1 \geq L$, т.е. $t_1 \geq \frac{L}{u-v}$, а $n \geq \frac{v}{u-v}$. В условиях задачи получается $n \geq 7$, т.е. при $n < 7$ $k=0$.

Можно также заметить, что к моменту, когда хозяин пройдет ровно 7 кругов, собака пробежит ровно 8, и они окажутся одновременно в точке старта. Картина станет начальной, т.е. искать решение для $k > 0$ не имеет смысла.

Искомое время $t = \frac{L + x}{v} = \frac{1,4L}{v} = 1,8$ мин.

Ответ: $t = 0,03$ час = 1,8 мин. <2 балла>

Разбалловка по этапам

	Этапы решения	Соотношения	Балл
1	Определение пути до встречи хозяина и его собаки	$S_1 = nL + x$, $S_2 = (n + k + 1)L - x$	2
2	Определение места встречи из условия равенства времени движения	$x = \frac{4,2(1+k) - 0,6n}{9} L$	3
3	Исследование возможных мест встречи на предмет попадания на отсутствующую секцию забора	Нечетная целая часть: $ x/l = 3$ при $n=1, k=0$	3
4	Получение ответа	$t = \frac{L + x}{v} = 1,8$ мин = 0,03 час	2

3. Автомобиль вначале разогнался из неподвижного состояния с постоянным ускорением, а затем двигался с достигнутой максимальной скоростью V . Средняя скорость при этом равна u . Какую часть времени автомобиль двигался равноускоренно?

Возможное решение

1) Обозначим полное время движения T , время равноускоренного движения t . Введем ускорение a , тогда максимальная скорость равна $V = at$ <1 балл>.

2) Полный пройденный путь будет $S = at^2 / 2 + V(T - t) = at(T - t / 2)$ <3 балла>.

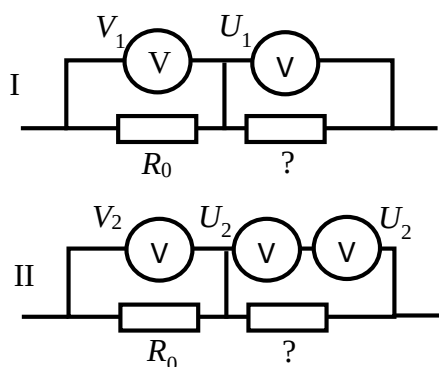
3) Средняя скорость движения автомобиля $u = S / T$ <1 балл>.

4) Удобно написать отношение $\frac{u}{V} = \frac{T - t / 2}{T} = 1 - \frac{t}{2T}$, откуда вычисляется искомая величина <3 балла>.

Ответ: $t / T = 2(1 - u / V)$ <2 балла>.

Разбалловка по этапам

	Этапы решения	Соотношения	Балл
1	Определение максимальной скорости	$V = at$	1
2	Определение полного пройденного пути	$S = at^2 / 2 + V(T - t) = at(T - t / 2)$	3
3	Определение средней скорости	$u = S / T$	1
4	Определение отношения средней скорости к максимальной скорости	$\frac{u}{V} = \frac{T - t / 2}{T} = 1 - \frac{t}{2T}$	3
5	Получение ответа	$t / T = 2(1 - u / V)$	2



4. В распоряжении инженера имелись три одинаковых вольтметра. Для того, чтобы измерить сопротивление резистора, включенного в схему последовательно с резистором с сопротивлением $R_0 = 1000$ Ом, инженер сделал два измерения. В первом случае он подключил вольтметры по схеме I (см. рисунок), а во втором – по схеме II. В первом случае вольтметры показывали, соответственно, $V_1 = 10$ В и $U_1 = 34$ В, во втором – $V_2 = 9$ В и $U_2 = 17$ В. Определите сопротивление неизвестного резистора. Вольтметры неидеальные (имеют конечное сопротивление).

Возможное решение

1) Обозначим внутреннее сопротивление вольтметра r , сопротивление неизвестного резистора R . При первом измерении сумма токов через резистор R_0 и первый вольтметр равна сумме токов через R и второй вольтметр:

$\frac{V_1}{R_0} + \frac{V_1}{r} = \frac{U_1}{R} + \frac{U_1}{r}$. <3 балла> Подставив значения напряжений и приведя к общему знаменателю, получим

$$5(R_0 + r)R = 17(R + r)R_0 \quad (1)$$

2) При втором измерении сумма токов через резистор R_0 и первый вольтметр равна сумме токов через R и два остальных вольтметра:

$$\frac{V_2}{R_0} + \frac{V_2}{r} = \frac{2U_2}{R} + \frac{U_2}{r} \quad <3 \text{ балла}> ,$$

после аналогичных действий

$$9(R_0 + r)R = 17(R + 2r)R_0 \quad (2)$$

3) Приравняв значение $r = \frac{12RR_0}{5R - 17R_0}$ из уравнения (1) значению $r = \frac{8RR_0}{9R - 34R_0}$ из уравнения (2), получим $12(9R - 34R_0) = 8(5R - 17R_0)$ <2 балла>, откуда находим ответ $R = 4R_0 = 4000 \text{ Ом}$.

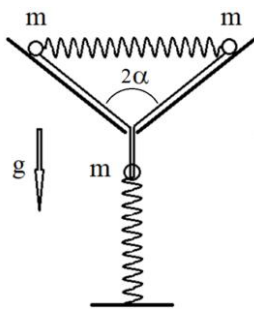
Ответ: $R = 4000 \text{ Ом}$. <2 балла>

Ответ через формальные величины, введенные в условии задачи:

$$R = R_0 \frac{2U_2(V_1 - U_1) - U_1(V_2 - U_2)}{V_2(V_1 - U_1) - V_1(V_2 - U_2)}$$

Разбалловка по этапам

	Этапы решения	Соотношения	Балл
1	Равенство входящего и выходящего тока через узел, соединяющий два резистора при двух вольтметрах	$\frac{V_1}{R_0} + \frac{V_1}{r} = \frac{U_1}{R} + \frac{U_1}{r}$	3
2	Равенство входящего и выходящего тока через узел, соединяющий два резистора при трех вольтметрах	$\frac{V_2}{R_0} + \frac{V_2}{r} = \frac{2U_2}{R} + \frac{U_2}{r}$	3
3	Получение уравнения для искомой величины	$12(9R - 34R_0) = 8(5R - 17R_0)$	2
4	Получение ответа	$R = 4000 \text{ Ом}$	2



5. В закрепленной конусообразной воронке с углом 2α при вершине расположены два шарика малого размера, соединенных пружиной жесткостью k . К шарикам прикреплена нить, которая проходит через отверстие в вершине конуса и серединой прикреплена к такой же пружине, зафиксированной снизу и расположенной вертикально (см. рисунок). Нить не провисает. Массы шариков m . Система находится в равновесии. На верхний конец нижней пружины прикрепляют шарик массой m . Насколько сожмется нижняя пружина в состоянии нового равновесия? Ускорение свободного падения g . Ось воронки вертикальна, а шарики расположены горизонтально, нить невесомая и нерастяжимая. Трения нет.

Возможное решение

1) Пусть в начальном состоянии верхняя пружина была сжата на x_0 , нижняя растянута на y_0 (обе величины положительны), а сила натяжения нити T_0 . Баланс сил, действующих на верхний шарик вдоль поверхности воронки $mg \cos \alpha + T_0 - kx_0 \sin \alpha = 0$ <2 балла>

2) Баланс сил, действующих на точку крепления нити и пружины $2T_0 - ky_0 = 0$. <1 балл>

Исключаем из уравнений T_0 :

$$mg \cos \alpha + 0,5ky_0 - kx_0 \sin \alpha = 0. \quad (1)$$

3) После добавления третьего шарика нижняя пружина сожмётся на Δy , верхняя на Δx , а сила натяжения нити станет T_1 . Баланс сил, действующих на верхний шарик после установления равновесия: $mg \cos \alpha + T_1 - k(x_0 + \Delta x) \sin \alpha = 0$.

4) Баланс сил, действующих на третий шарик, будет $2T_1 - k(y_0 - \Delta y) - mg = 0$ <2 балла>

Исключаем из уравнений T_1 :

$$mg \cos \alpha + 0,5k(y_0 - \Delta y) + 0,5mg - k(x_0 + \Delta x) \sin \alpha = 0. \quad (2)$$

Вычтем из уравнения (2) уравнение (1): $-0,5k\Delta y + 0,5mg - k\Delta x \sin \alpha = 0$. (3) <1 балл>

5) Запишем условие, следующее из того, что нить нерастяжимая:

$$\Delta y = \frac{\Delta x}{2 \sin \alpha}. \quad (4) \text{ <2 балла>}$$

Решая уравнения (3) и (4) получим ответ.

$$\text{Ответ: } \Delta y = \frac{mg}{k(1 + 4 \sin^2 \alpha)} \text{ <2 балла>}$$

Разбалловка по этапам

	Этапы решения	Соотношения	Балл
1	Баланс сил, действующих на верхний шарик вдоль поверхности воронки	$mg \cos \alpha + T_0 - kx_0 \sin \alpha = 0$,	2
2	Баланс сил, действующих на точку крепления нити и нижней пружины	$2T_0 - ky_0 = 0$	1
3	Баланс сил, действующих на нижний шарик	$2T_1 - k(y_0 - \Delta y) - mg = 0$	2
4	Уравнение, связывающее изменения длин пружин	$-0,5k\Delta y + 0,5mg - k\Delta x \sin \alpha = 0$.	1
5	Условие нерастяжимости нити	$\Delta y = \frac{\Delta x}{2 \sin \alpha}$	2
6	Получение ответа	$\Delta y = \frac{mg}{k(1 + 4 \sin^2 \alpha)}$	2