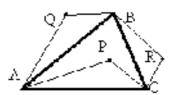
## Заключительный этап Всесибирской олимпиады школьников по математике 2008/2009 гг 9 класс

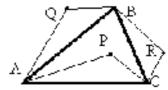
- **9.1.** Объёмы ежегодной добычи нефти первой, второй и третьей скважинами относятся как 7 : 6 : 5. Планируется уменьшить годовую добычу нефти из первой скважины на 4%, а из второй на 2%. На сколько процентов нужно увеличить годовую добычу нефти из третьей скважины, чтобы суммарный объём добываемой за год нефти не изменился?
- 9.2. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC длина средней линии, параллельной стороне AB, равна длине высоты, проведённой из вершины C. Найти углы треугольника.
- 9.3. Можно ли на плоскости уложить семь красных квадратов и один синий так, чтобы синий квадрат имел с каждым красным хотя бы по одной общей внутренней точке, и никакие два красных квадрата не имели общих внутренних точек? Размеры всех квадратов одинаковы.
- **9.4.** Существуют ли два натуральных числа a и b таких, что суммы их цифр равны 2008 и 2009, а сумма цифр a+b равна 2010?
- **9.5.** На сторонах треугольника ABC построены три подобных треугольника ABQ, BCR и ACP (при подобии соответствующим являются их вершины в том порядке, в каком написаны), как показано на рисунке. Доказать, что четырёхугольник PQBR параллелограмм.



**9.6.** В ребусе на сложение трёхзначных чисел  $\mathcal{A}VE + \mathcal{A}VE + ... + \mathcal{A}VE = POULA$  буквами зашифрованы цифры, при этом разные буквы, как обычно, соответствуют разным цифрам. Какое наибольшее количество «дубов» может быть в левой части?

### Заключительный этап Всесибирской олимпиады школьников по математике 2008/2009 гг 9 класс

- **9.1.** Объёмы ежегодной добычи нефти первой, второй и третьей скважинами относятся как 7 : 6 : 5. Планируется уменьшить годовую добычу нефти из первой скважины на 4%, а из второй на 2%. На сколько процентов нужно увеличить годовую добычу нефти из третьей скважины, чтобы суммарный объём добываемой за год нефти не изменился?
- 9.2. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC длина средней линии, параллельной стороне AB, равна длине высоты, проведённой из вершины C. Найти углы треугольника.
- 9.3. Можно ли на плоскости уложить семь красных квадратов и один синий так, чтобы синий квадрат имел с каждым красным хотя бы по одной общей внутренней точке, и никакие два красных квадрата не имели общих внутренних точек? Размеры всех квадратов одинаковы.
- **9.4.** Существуют ли два натуральных числа a и b таких, что суммы их цифр равны 2008 и 2009, а сумма цифр a+b равна 2010?
- **9.5.** На сторонах треугольника ABC построены три подобных треугольника ABQ, BCR и ACP (при подобии соответствующим являются их вершины в том порядке, в каком написаны), как показано на рисунке. Доказать, что четырёхугольник PQBR параллелограмм.



**9.6.** В ребусе на сложение трёхзначных чисел  $\mathcal{A}VB + \mathcal{A}VB + ... + \mathcal{A}VB = POULA$  буквами зашифрованы цифры, при этом разные буквы, как обычно, соответствуют разным цифрам. Какое наибольшее количество «дубов» может быть в левой части?

### Заключительный этап Всесибирской олимпиады школьников по математике 2008/2009 гг 10 класс

- **10.1.** Если к смеси двух веществ A и B добавить 3 кг вещества A, то его процентное содержание увеличится вдвое. Если же к исходной смеси добавить 3 кг вещества B, то процентное содержание A уменьшится вдвое. Определить процентное содержание A в смеси.
- **10.2.** На стороне AC остроугольного треугольника ABC взята произвольная внутренняя точка P. Точки S и T основания перпендикуляров, опущенных из точки P на AB и BC соответственно. Доказать, что серединный перпендикуляр к отрезку ST делит отрезок BP пополам.
- **10.3.** Некоторые из 13 больших коробок содержат по 6 средних, а некоторые из средних коробок содержат по 6 маленьких. Сколько всего коробок, если пустых 88 штук?
- **10.4.** В последовательности  $\{a_n\}$ , n=1,2,... для любого n выполнено равенство  $a_{n+1}-2a_n=a_n^{-2}$ . Найти все значения, которые может принимать  $a_{1000}$ .
- **10.5.** Пусть прямая I биссектриса угла BOC между диагоналями AC и BD трапеции ABCD с основаниями AD и BC. Обозначим за  $B_1$  и  $C_1$  точки, симметричные вершинам B и C относительно I. Докажите, что  $\angle BDB_1 = \angle CAC_1$ .
- 10.6. Доказать, что среди произвольных тринадцати человек либо найдутся четверо попарно незнакомых, либо найдётся человек, знакомый не менее, чем с четырьмя другими.

#### Заключительный этап Всесибирской олимпиады школьников по математике 2008/2009 гг 10 класс

- **10.1.** Если к смеси двух веществ A и B добавить 3 кг вещества A, то его процентное содержание увеличится вдвое. Если же к исходной смеси добавить 3 кг вещества B, то процентное содержание A уменьшится вдвое. Определить процентное содержание A в смеси.
- **10.2.** На стороне AC остроугольного треугольника ABC взята произвольная внутренняя точка P. Точки S и T основания перпендикуляров, опущенных из точки P на AB и BC соответственно. Доказать, что серединный перпендикуляр к отрезку ST делит отрезок BP пополам.
- **10.3.** Некоторые из 13 больших коробок содержат по 6 средних, а некоторые из средних коробок содержат по 6 маленьких. Сколько всего коробок, если пустых 88 штук?
- **10.4.** В последовательности  $\{a_n\}$ , n=1,2,... для любого n выполнено равенство  $a_{n+1}-2a_n=a_n^{-2}$ . Найти все значения, которые может принимать  $a_{1000}$ .
- **10.5.** Пусть прямая I биссектриса угла BOC между диагоналями AC и BD трапеции ABCD с основаниями AD и BC. Обозначим за  $B_1$  и  $C_1$  точки, симметричные вершинам B и C относительно I. Докажите, что  $\angle BDB_1 = \angle CAC_1$ .
- 10.6. Доказать, что среди произвольных тринадцати человек либо найдутся четверо попарно незнакомых, либо найдётся человек, знакомый не менее, чем с четырьмя другими.

# Заключительный этап Всесибирской олимпиады школьников по математике 2008/2009 гг 11 класс

- **11.1.** Кооператив получает яблочный и виноградный соки в одинаковых бидонах и выпускает яблочновиноградный напиток в одинаковых банках. Одного бидона яблочного сока хватает ровно на 6 банок напитка, а одного бидона виноградного сока ровно на 10 банок. Когда рецептуру напитка (пропорцию соков) изменили, одного бидона яблочного сока стало хватать ровно на 5 банок напитка. На сколько банок напитка хватит теперь одного бидона виноградного сока?
- **11.2.** Решить уравнение  $\frac{\sin x}{\sin 3x} = \frac{1}{2}$ .
- **11.3.** В параллелограмме ABCD длины сторон AB и BC равны соответственно 10 и 15 см,  $\Phi DAB = \arccos \frac{3}{5}$ . Внутри ABCD выбрана точка M такая, что  $MC = 3\sqrt{10}$ , а расстояние от M до прямой AD равно 5 см. Найти длину AM.
- **11.4.** Найти все решения системы уравнений: x + y = xy, x + z = 2xz, y + z = 7yz.
- **11.5.** Пусть функция  $f: R \to R$  определена на всех действительных числах и для любого  $\mathcal{X}$  выполняются равенства f(x+2) = f(2-x), f(x+7) = f(7-x). Доказать, что f периодическая и найти её период.
- **11.6.** К окружности проведены две различные касательные в точках A и B, расстояние от точки M на окружности до этих касательных равны, соответственно, P и Q. Найти расстояние от M до прямой AB.
- **11.7.** Найти все решения уравнения  $x^2 = 3^y + 3^z$  в натуральных числах.
- **11.8.** Про восемь трёхэлементных множеств известно, что каждые два из них имеют ровно один общий элемент. Доказать, что все множества имеют общий элемент.

#### Заключительный этап Всесибирской олимпиады школьников по математике 2008/2009 гг 11 класс

- **11.1.** Кооператив получает яблочный и виноградный соки в одинаковых бидонах и выпускает яблочновиноградный напиток в одинаковых банках. Одного бидона яблочного сока хватает ровно на 6 банок напитка, а одного бидона виноградного сока ровно на 10 банок. Когда рецептуру напитка (пропорцию соков) изменили, одного бидона яблочного сока стало хватать ровно на 5 банок напитка. На сколько банок напитка хватит теперь одного бидона виноградного сока?
- **11.2.** Решить уравнение  $\frac{\sin x}{\sin 3x} = \frac{1}{2}$ .
- **11.3.** В параллелограмме ABCD длины сторон AB и BC равны соответственно 10 и 15 см,  $\Phi DAB = \arccos \frac{3}{5}$ . Внутри ABCD выбрана точка M такая, что  $MC = 3\sqrt{10}$ , а расстояние от M до прямой AD равно 5 см. Найти длину AM.
- **11.4.** Найти все решения системы уравнений: x + y = xy, x + z = 2xz, y + z = 7yz.
- **11.5.** Пусть функция  $f: R \to R$  определена на всех действительных числах и для любого X выполняются равенства f(x+2) = f(2-x), f(x+7) = f(7-x). Доказать, что f периодическая и найти её период.
- **11.6.** К окружности проведены две различные касательные в точках A и B, расстояние от точки M на окружности до этих касательных равны, соответственно, P и Q. Найти расстояние от M до прямой AB.
- **11.7.** Найти все решения уравнения  $x^2 = 3^y + 3^z$  в натуральных числах.
- 11.8. Про восемь трёхэлементных множеств известно, что каждые два из них имеют ровно один общий элемент. Доказать, что все множества имеют общий элемент.