

Заключительный этап Всесибирской олимпиады школьников по математике 2008/2009 гг
9 класс

9.1. Объёмы ежегодной добычи нефти первой, второй и третьей скважинами относятся как $7 : 6 : 5$. Планируется уменьшить годовую добычу нефти из первой скважины на 4%, а из второй – на 2%. На сколько процентов нужно увеличить годовую добычу нефти из третьей скважины, чтобы суммарный объём добываемой за год нефти не изменился?

9.2. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC длина средней линии, параллельной стороне AB , равна длине высоты, проведённой из вершины C . Найти углы треугольника.

9.3. Можно ли на плоскости уложить семь красных квадратов и один синий так, чтобы синий квадрат имел с каждым красным хотя бы по одной общей внутренней точке, и никакие два красных квадрата не имели общих внутренних точек? Размеры всех квадратов одинаковы.

9.4. Существуют ли два натуральных числа a и b таких, что суммы их цифр равны 2008 и 2009, а сумма цифр $a + b$ равна 2010?

9.5. На сторонах треугольника ABC построены три подобных треугольника ABQ , BCR и ACP (при подобии соответствующим являются их вершины в том порядке, в каком написаны), как показано на рисунке. Доказать, что четырёхугольник $PQBR$ – параллелограмм.



9.6. В ребусе на сложение трёхзначных чисел $ДУБ + ДУБ + \dots + ДУБ = РОЩА$ буквами зашифрованы цифры, при этом разные буквы, как обычно, соответствуют разным цифрам. Какое наибольшее количество «дубов» может быть в левой части?

Заключительный этап Всесибирской олимпиады школьников по математике 2008/2009 гг
9 класс

9.1. Объёмы ежегодной добычи нефти первой, второй и третьей скважинами относятся как $7 : 6 : 5$. Планируется уменьшить годовую добычу нефти из первой скважины на 4%, а из второй – на 2%. На сколько процентов нужно увеличить годовую добычу нефти из третьей скважины, чтобы суммарный объём добываемой за год нефти не изменился?

9.2. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC длина средней линии, параллельной стороне AB , равна длине высоты, проведённой из вершины C . Найти углы треугольника.

9.3. Можно ли на плоскости уложить семь красных квадратов и один синий так, чтобы синий квадрат имел с каждым красным хотя бы по одной общей внутренней точке, и никакие два красных квадрата не имели общих внутренних точек? Размеры всех квадратов одинаковы.

9.4. Существуют ли два натуральных числа a и b таких, что суммы их цифр равны 2008 и 2009, а сумма цифр $a + b$ равна 2010?

9.5. На сторонах треугольника ABC построены три подобных треугольника ABQ , BCR и ACP (при подобии соответствующим являются их вершины в том порядке, в каком написаны), как показано на рисунке. Доказать, что четырёхугольник $PQBR$ – параллелограмм.



9.6. В ребусе на сложение трёхзначных чисел $ДУБ + ДУБ + \dots + ДУБ = РОЩА$ буквами зашифрованы цифры, при этом разные буквы, как обычно, соответствуют разным цифрам. Какое наибольшее количество «дубов» может быть в левой части?

Заключительный этап Всесибирской олимпиады школьников по математике 2008/2009 гг
10 класс

10.1. Если к смеси двух веществ А и В добавить 3 кг вещества А, то его процентное содержание увеличится вдвое. Если же к исходной смеси добавить 3 кг вещества В, то процентное содержание А уменьшится вдвое. Определить процентное содержание А в смеси.

10.2. На стороне АС остроугольного треугольника АВС взята произвольная внутренняя точка Р. Точки S и Т - основания перпендикуляров, опущенных из точки Р на АВ и ВС соответственно. Доказать, что серединный перпендикуляр к отрезку ST делит отрезок ВР пополам.

10.3. Некоторые из 13 больших коробок содержат по 6 средних, а некоторые из средних коробок содержат по 6 маленьких. Сколько всего коробок, если пустых 88 штук?

10.4. В последовательности $\{a_n\}, n=1,2,\dots$ для любого n выполнено равенство $a_{n+1} - 2a_n = a_n^2$. Найти все значения, которые может принимать a_{1000} .

10.5. Пусть прямая l - биссектриса угла BOC между диагоналями AC и BD трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC . Обозначим за B_1 и C_1 точки, симметричные вершинам B и C относительно l . Докажите, что $\angle BDB_1 = \angle CAC_1$.

10.6. Доказать, что среди произвольных тринадцати человек либо найдутся четверо попарно незнакомых, либо найдётся человек, знакомый не менее, чем с четырьмя другими.

Заключительный этап Всесибирской олимпиады школьников по математике 2008/2009 гг
10 класс

10.1. Если к смеси двух веществ А и В добавить 3 кг вещества А, то его процентное содержание увеличится вдвое. Если же к исходной смеси добавить 3 кг вещества В, то процентное содержание А уменьшится вдвое. Определить процентное содержание А в смеси.

10.2. На стороне АС остроугольного треугольника АВС взята произвольная внутренняя точка Р. Точки S и Т - основания перпендикуляров, опущенных из точки Р на АВ и ВС соответственно. Доказать, что серединный перпендикуляр к отрезку ST делит отрезок ВР пополам.

10.3. Некоторые из 13 больших коробок содержат по 6 средних, а некоторые из средних коробок содержат по 6 маленьких. Сколько всего коробок, если пустых 88 штук?

10.4. В последовательности $\{a_n\}, n=1,2,\dots$ для любого n выполнено равенство $a_{n+1} - 2a_n = a_n^2$. Найти все значения, которые может принимать a_{1000} .

10.5. Пусть прямая l - биссектриса угла BOC между диагоналями AC и BD трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC . Обозначим за B_1 и C_1 точки, симметричные вершинам B и C относительно l . Докажите, что $\angle BDB_1 = \angle CAC_1$.

10.6. Доказать, что среди произвольных тринадцати человек либо найдутся четверо попарно незнакомых, либо найдётся человек, знакомый не менее, чем с четырьмя другими.

Заключительный этап Всесибирской олимпиады школьников по математике 2008/2009 гг
11 класс

11.1. Кооператив получает яблочный и виноградный соки в одинаковых бидонах и выпускает яблочно-виноградный напиток в одинаковых банках. Одного бидона яблочного сока хватает ровно на 6 банок напитка, а одного бидона виноградного сока – ровно на 10 банок. Когда рецептуру напитка (пропорцию соков) изменили, одного бидона яблочного сока стало хватать ровно на 5 банок напитка. На сколько банок напитка хватит теперь одного бидона виноградного сока?

11.2. Решить уравнение $\frac{\sin x}{\sin 3x} = \frac{1}{2}$.

11.3. В параллелограмме $ABCD$ длины сторон AB и BC равны соответственно 10 и 15 см, $\angle DAB = \arccos \frac{3}{5}$. Внутри $ABCD$ выбрана точка M такая, что $MC = 3\sqrt{10}$, а расстояние от M до прямой AD равно 5 см. Найти длину AM .

11.4. Найти все решения системы уравнений: $x + y = xy, x + z = 2xz, y + z = 7yz$.

11.5. Пусть функция $f: R \rightarrow R$ определена на всех действительных числах и для любого x выполняются равенства $f(x+2) = f(2-x), f(x+7) = f(7-x)$. Доказать, что f - периодическая и найти её период.

11.6. К окружности проведены две различные касательные в точках A и B , расстояние от точки M на окружности до этих касательных равны, соответственно, P и Q . Найти расстояние от M до прямой AB .

11.7. Найти все решения уравнения $x^2 = 3^y + 3^z$ в натуральных числах.

11.8. Про восемь трёхэлементных множеств известно, что каждые два из них имеют ровно один общий элемент. Доказать, что все множества имеют общий элемент.

Заключительный этап Всесибирской олимпиады школьников по математике 2008/2009 гг
11 класс

11.1. Кооператив получает яблочный и виноградный соки в одинаковых бидонах и выпускает яблочно-виноградный напиток в одинаковых банках. Одного бидона яблочного сока хватает ровно на 6 банок напитка, а одного бидона виноградного сока – ровно на 10 банок. Когда рецептуру напитка (пропорцию соков) изменили, одного бидона яблочного сока стало хватать ровно на 5 банок напитка. На сколько банок напитка хватит теперь одного бидона виноградного сока?

11.2. Решить уравнение $\frac{\sin x}{\sin 3x} = \frac{1}{2}$.

11.3. В параллелограмме $ABCD$ длины сторон AB и BC равны соответственно 10 и 15 см, $\angle DAB = \arccos \frac{3}{5}$. Внутри $ABCD$ выбрана точка M такая, что $MC = 3\sqrt{10}$, а расстояние от M до прямой AD равно 5 см. Найти длину AM .

11.4. Найти все решения системы уравнений: $x + y = xy, x + z = 2xz, y + z = 7yz$.

11.5. Пусть функция $f: R \rightarrow R$ определена на всех действительных числах и для любого x выполняются равенства $f(x+2) = f(2-x), f(x+7) = f(7-x)$. Доказать, что f - периодическая и найти её период.

11.6. К окружности проведены две различные касательные в точках A и B , расстояние от точки M на окружности до этих касательных равны, соответственно, P и Q . Найти расстояние от M до прямой AB .

11.7. Найти все решения уравнения $x^2 = 3^y + 3^z$ в натуральных числах.

11.8. Про восемь трёхэлементных множеств известно, что каждые два из них имеют ровно один общий элемент. Доказать, что все множества имеют общий элемент.