Решения и критерии проверки задач первого этапа
Всесибирской олимпиады школьников 2020-2021 г.г. по математике
7 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

7.1. Антон испёк такой торт, который Арина смогла разделить одним прямолинейным разрезом на 4 части. Как такое могло быть? *(достаточно привести один пример)*

Решение: Подходит, например, торт в форме буквы Ш, у которого отрезаются все вертикальные палки. Существует множество других возможных примеров.
Критерии: Любой верный пример – 7 баллов.

7.2. Сева написал на доске верное равенство, а Юра заменил в нём все цифры на буквы, причём разные цифры он заменил на разные буквы, а одинаковые – на одинаковые. В результате на доске оказалось записано

$$Я + ОН + ОН + ОН + ОН + ОН + ОН + ОН + ОН = МЫ.$$

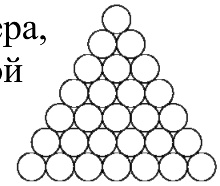
(Всего восемь слагаемых "ОН"). Какое равенство могло быть записано изначально? *(найдите все возможные ответы и докажите, что других нет)*

Ответ: $Я = 0$, $ОН = 12$, $МЫ = 96$.
Решение: Заметим, что $ОН < 13$, так как $13 * 8 = 104$ – уже трёхзначное число. Кроме того, ОН не равно 11, так как разные буквы обозначают разные цифры. Если $ОН = 10$, то записано равенство $Я + 80 = МЫ$, но тогда $Ы = Я$.
Значит, $ОН = 12$, а равенство имеет вид $Я + 96 = МЫ$. Я не равно 1 и 2, потому что эти цифры уже заняты. Кроме того, если $Я = 3$, то $МЫ = 99$, что тоже невозможно. Если $Я > 3$, то МЫ должно быть трёхзначным. Значит, $Я = 0$, $МЫ = 96$.
Критерии: Только верный ответ – 2 балла.
Доказано, что $ОН < 13$ – 2 балла.
Доказано, что $ОН = 12$ – 2 балла.
Доказано, что $Я = 0$ – 3 балла.
Баллы за последние три пункта суммируются.
Если ученик считал, что все числа должны быть положительны (получил, что $Я = 0$ и сказал, что решений нет) – баллы не снимать при условии, что проверено, что $Я = 0$ подходит.
Если не проверено – снимать 1 балл.

7.3. За большим круглым столом сидят 100 человек. Каждый из них либо рыцарь, либо лжец, либо чудак. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут. Чудак говорит правду, если слева от него сидит лжец; ложь, если слева от него сидит рыцарь; всё что угодно, если слева от него сидит чудак. Каждый из сидящих за столом сказал: "Справа от меня сидит лжец". Сколько всего лжецов может находиться за столом? *(найдите все возможные ответы и докажите, что других нет)*

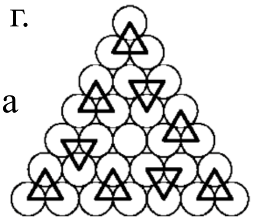
Ответ: 0 или 50 лжецов.
Решение: Если за столом есть лжец, тогда справа от лжеца – чудак или рыцарь. В такой ситуации оба они говорят правду, значит, следующий после них – снова лжец. Получаем, что лжецы и не лжецы чередуются, т.е. лжецов ровно половина.
Если же лжецов за столом нет, то рыцарей тоже нет (потому что справа от рыцаря должен быть лжец), и за столом одни чудаки, и такой вариант тоже возможен.
Критерии: Только ответ – 0 баллов.
Только ответ 50 с примером, что такое может быть – 1 балл.
Только ответ 0 с примером, что такое может быть – 1 балл (складывается с предыдущим).
Рассмотрен только случай, когда лжецы есть – 5 баллов.
Рассмотрен только случай, когда лжецов нет – 2 балла.
В полном решении сказано, что лжецов может быть 0, но не показано, что такой пример действительно возможен – минус 1 балл.

7.4. На столе в виде треугольника выложены 28 монет одинакового размера, но, возможно, разной массы (рис.). Известно, что суммарная масса любой тройки монет, которые попарно касаются друг друга, равна 10 г. Найдите суммарную массу всех 18 монет на границе треугольника.

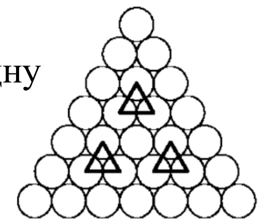


Ответ: 60 г.
Решение 1: Возьмём ромбик из 4 монет. Как видно из рис., массы двух не касающихся друг друга монет в нём равны. Рассматривая такие ромбики, получаем, что если покрасить монеты в 3 цвета, как на рис., то монеты одного цвета будут иметь одинаковую массу.
Теперь легко найти и сумму масс монет на границе: там имеется по 6 монет каждого цвета, а сумма масс трёх разноцветных монет равна 10 г; значит, суммарная масса монет на границе равна $6 \cdot 10 = 60$ г.

Решение 2: Все монеты без центральной можно разбить на 9 троек, а все внутренние монеты без центральной — на 3 тройки. Значит, монеты на границе весят столько же, сколько 9-3=6 троек, т.е. 60 г.



Критерии: Только ответ – 0 баллов.
Рассмотрены ромбики и показано, что в них две монеты имеют одну массу – 2 балла.
В дополнение к этому доказано, что веса во всём треугольнике имеют вид как на рисунке (сделана раскраска, но дальнейших продвижений нет) – ещё 2 балла.



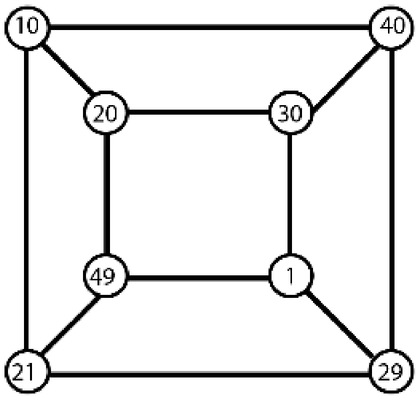
7.5. Комплект для игры в лото содержит 90 бочонков, пронумерованных натуральными числами от 1 до 90. Бочонки каким-то образом разложены по нескольким мешкам (в каждом мешке больше одного бочонка). Назовём мешок хорошим, если номер одного из бочонков в нём равен произведению номеров остальных бочонков того же мешка (например, мешок “2, 3, 6” хороший, а “4, 5, 10” – нет). Каково наибольшее возможное количество хороших мешков?

Ответ: 8.
Решение: В каждом хорошем мешке не менее трёх бочонков. Наименьший номер в каждом хорошем мешке должен быть однозначным, иначе наибольший номер в этом мешке не меньше $10 \times 11 = 110$, что невозможно. По тем же соображениям если в хорошем мешке есть бочонок с номером 1, то в нем должен быть еще один бочонок с однозначным номером. Поэтому количество хороших мешков не превосходит 8.
С другой стороны, можно привести пример, когда хороших мешков ровно 8. Соберем 8 хороших мешков (2, 17, 34), (3, 16, 48), (4, 15, 60), (5, 14, 70), (6, 13, 78), (7, 12, 84), (8, 11, 88) и (9, 10, 90). Все неуказанные номера поместим в какой-то отдельный мешок, не являющийся хорошим.
Критерии: Только пример – 3 балла.
Только оценка – 3 балла.
Только замечено, что в каждом мешке должен быть однозначный номер – 1 балл, может суммироваться с примером.

Решения и критерии проверки задач первого этапа Всесибирской олимпиады школьников 2020-2021 г.г. по математике 8 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

8.1. Петя расставил в вершинах куба 8 различных чисел, после чего Вася в центре каждой грани записал сумму чисел в вершинах этой грани. Все шесть васиных чисел оказались равны между собой. Приведите пример, как такое могло быть.

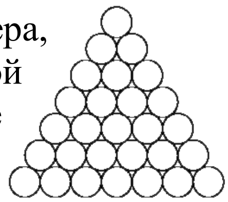


Решение: Подходит, например, расстановка изображённая на рисунке (кружками обозначены вершины куба, отрезками – его рёбра).
Легко проверить, что сумма чисел на любой грани равна 100
Критерии: Любой верный пример без проверки – 7 баллов.

8.2. Утёнок с гусёнком соревновались в триатлоне. Дистанция состояла из одинаковых по длине участков бега, плавания и полета. Утёнок бежал, плыл и летел с одинаковой скоростью. Гусёнок бежал вдвое медленнее утёнка, зато плыл вдвое быстрее. Кто и во сколько раз быстрее летел, если и стартовали, и финишировали они одновременно?

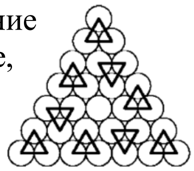
Ответ: Гусёнок летел быстрее в 2 раза.
Решение: Примем время, потраченное утёнком на каждый участок дистанции, за двойку. Тогда время, потраченное гусёнком на бег и на плавание, составляет 4 и 1 соответственно. Следовательно, на полёт у него ушло $6 - 4 - 1 = 1$, т.е. летел он в 2 раза быстрее утёнка.
Критерии: Только ответ – ноль баллов.
Только ответ с проверкой, что такое могло быть – 1 балл.

8.3. На столе в виде треугольника выложены 28 монет одинакового размера, но, возможно, разной массы (рис.). Известно, что суммарная масса любой тройки монет, которые попарно касаются друг друга, равна 10 г. Найдите суммарную массу всех 18 монет на границе треугольника.

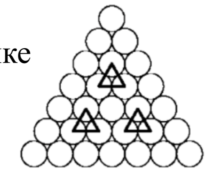


Ответ: 60 г.
Решение 1: Возьмём ромбик из 4 монет. Как видно из рис., массы двух не касающихся друг друга монет в нём равны. Рассматривая такие ромбики, получаем, что если покрасить монеты в 3 цвета, как на рис., то монеты одного цвета будут иметь одинаковую массу.Теперь легко найти и сумму масс монет на границе: там имеется по 6 монет каждого цвета, а сумма масс трёх разноцветных монет равна 10 г; значит, суммарная масса монет на границе равна $6 \cdot 10 = 60$ г.

Решение 2: Все монеты без центральной можно разбить на 9 троек, а все внутренние монеты без центральной — на 3 тройки. Значит, монеты на границе весят столько же, сколько 9-3=6 троек, т.е. 60 г.



Критерии: Только ответ – 0 баллов.
Рассмотрены ромбики и показано, что в них две монеты имеют одну массу – 2 балла.
В дополнение к этому доказано, что веса во всём треугольнике имеют вид как на рисунке (сделана раскраска, но дальнейших продвижений нет) – ещё 2 балла.



8.4. Какое наибольшее количество непересекающихся диагоналей можно провести в выпуклом n-угольнике (допускаются диагонали, имеющие общую вершину)?

Ответ: n - 3
Решение: Каждая проведённая диагональ увеличивает число многоугольников-частей на 1. Поэтому проведя k непересекающихся диагоналей, мы разрежем n-угольник на $k + 1$ многоугольников. Оценим их количество.

Первый способ. Общее число сторон получившихся частей равно $n + 2k$ (каждая диагональ является стороной двух многоугольников). У каждого многоугольника не меньше трёх сторон. Поэтому $n + 2k \geq 3(k + 1)$, то есть $k \leq n - 3$.

Второй способ. Общая сумма углов получившихся частей равна сумме углов исходного n-угольника, то есть $(n - 2)\cdot 180°$. Сумма углов каждого многоугольника не меньше 180°. Поэтому $n - 2 \geq k + 1$, то есть $k \leq n - 3$.

Пример с $n - 3$ диагоналями можно получить, если разрезать n-угольник на треугольники (например, провести все диагонали, выходящие из одной вершины).
Критерии: Только пример на $n - 3$ диагонали – 1 балл.

8.5. Комплект для игры в лото содержит 90 бочонков, пронумерованных натуральными числами от 1 до 90. Бочонки каким-то образом разложены по нескольким мешкам (в каждом мешке больше одного бочонка). Назовём мешок хорошим, если номер одного из бочонков в нём равен произведению номеров остальных бочонков того же мешка (например, мешок “2, 3, 6” хороший, а “4, 5, 10” – нет). Каково наибольшее возможное количество хороших мешков?

Ответ: 8.
Решение: В каждом хорошем мешке не менее трёх бочонков. Наименьший номер в каждом хорошем мешке должен быть однозначным, иначе наибольший номер в этом мешке не меньше $10 \times 11 = 110$, что невозможно. По тем же соображениям если в хорошем мешке есть бочонок с номером 1, то в нем должен быть еще один бочонок с однозначным номером. Поэтому количество хороших мешков не превосходит 8.
С другой стороны, можно привести пример, когда хороших мешков ровно 8. Соберем 8 хороших мешков (2, 17, 34), (3, 16, 48), (4, 15, 60), (5, 14, 70), (6, 13, 78), (7, 12, 84), (8, 11, 88) и (9, 10, 90). Все неуказанные номера поместим в какой-то отдельный мешок, не являющийся хорошим.
Критерии: Только пример – 3 балла.
Только оценка – 3 балла.
Только замечено, что в каждом мешке должен быть однозначный номер – 1 балл, может суммироваться с примером.

Решения заданий первого этапа
Всесибирской открытой олимпиады школьников 2020-2021 гг.
9 класс
Каждая задача оценивается из 7 баллов

9.1..По кругу сидят рыцари и лжецы – всего 12 человек. Каждый из них сказал фразу: «Все сидящие за столом, кроме, может быть, меня и моих соседей, лжецы». Сколько за столом рыцарей, если рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут?

Ответ. Два.

Решение. Если за столом больше двух рыцарей, то какие-то два из них не соседи и ни один из них не может сказать, что все за столом, кроме, может быть, него и его соседей, лжецы, ибо это будет ложью. Если за столом один рыцарь, то для любого лжеца, соседнего с ним, эта же фраза будет правдой, которую ему говорить не положено. Тоже самое будет верно для любого лжеца, если за столом вообще нет рыцарей.

Если за столом ровно два рыцаря, сидящих рядом, условие задачи выполнено.

Критерии оценивания. Если доказано, что рыцарей может быть только два, но не приведён пример с двумя соседними рыцарями: 4 балла.

9.2..Сергей раскладывает 200 спичек на 6 разных кучек. Боря уравнивает количества спичек в некоторых двух кучках, взяв несколько спичек из большей из них (один раз). Боря стремится взять как можно меньшее количество спичек. Какое максимальное число спичек Сергей может заставить взять Борю?

Ответ. 12.

Решение. Упорядочим кучи по возрастанию, обозначим количества спичек в них за $a_1 \le a_2 \le ... \le a_6$. Естественная стратегия Бори – уравнять две кучи с минимальной разностью d, то есть две кучи с соседними номерами. Если все разности количества спичек в соседних кучах не меньше 13, то $a_1 \ge 1, a_2 \ge 14, a_3 \ge 27, a_4 \ge 40, a_5 \ge 53, a_6 \ge 66$ и сумма $a_1 + a_2 + ... + a_6 \ge 201$. Следовательно, при любом раскладе есть разность не большая 12, поэтому Сергей не сможет заставить Борю взять больше 12 спичек. С другой стороны, если в кучах будут $a_1 = 1, a_2 = 14, a_3 = 27, a_4 = 40, a_5 = 53, a_6 = 65$ спичек, то Боря не сможет взять меньше 12 спичек.

Критерии оценивания. Доказано, что Сергей не сможет заставить Борю взять больше 12 спичек: 4 балла. Пример, когда Боря не сможет взять меньше 12 спичек: 3 балла.

9.3. Найти все тройки различных натуральных чисел, наименьшее общее кратное которых равно их сумме. Наименьшим общим кратным нескольких чисел называется наименьшее натуральное число, делящееся на каждое из этих чисел.

Ответ. Все тройки вида $\{n, 2n, 3n\}$ для произвольного натурального n.

Решение. Обозначим искомые числа за $a < b < c$. По условию их наименьшее общее кратное, равное $a+b+c$, делится на c, поэтому на c делится и сумма $a+b < 2c$. Следовательно, $a+b=c$. Далее, $a+b+c = 2a+2b$ делится на b, поэтому на b делится и $2a < 2b$. Следовательно, $2a = b$ и $c = a+b = 3a$, натуральное число a при этом может быть любым.

С другой стороны, для любой тройки натуральных чисел вида $a = n, b = 2n, c = 3n$, их наименьшее общее кратное равно $6n$. Действительно, оно должно делиться на $3n$, но не равно $3n$, потому, что $3n$ не делится на $2n$, следовательно, оно не меньше $3n \cdot 2 = 6n$. Осталось заметить, что $6n$ делится на каждое из чисел $a = n, b = 2n, c = 3n$.

Критерии оценивания. Только приведён пример троек вида $\{n, 2n, 3n\}$ для произвольного натурального n: 2 балла. Пример для частных n: 1 балл. Доказано, что $a+b=c$: 2 балла.

Доказано, что $2a = b$: 2 балла.

9.4..В треугольнике ABC точка M – середина стороны BC, H – основание высоты, опущенной из вершины B.. Известно, что угол MCA вдвое больше угла MAC, а длина BC равна 10 см. Найти длину отрезка AH.

Ответ. AH=5 см.

Решение. В прямоугольном треугольнике BHC отрезок HM – медиана к гипотенузе, поэтому длина HM равна половине длины BC, то есть 5 см.

Треугольник CHM равнобедренный с HM=MC, поэтому угол MHC равен углу MCH=MCA и вдвое больше угла MAC.

Угол MHC – внешний для треугольника AMH, его величина равна сумме углов MAH и AMH и он вдвое больше MAH=MAC. Следовательно, углы MAH и HMA равны, треугольник AMH равнобедренный, поэтому AH=HM=5 см.

9.5. Докажите, что любые 100 карточек, на которых написано по одной цифре 1, 2 или 3, встречающейся не более чем по 50 раз каждая, можно разложить в один ряд так, чтобы в нём не было фрагментов 11, 22, 33, 123 и 321.

Доказательство. Обозначим число карточек с 1, 2, 3 за a,b,c соответственно, по условию $a,b,c \le 50$ и $a+b+c=100$. Будем располагать карточки в следующем порядке: сначала x пар карточек с 2 и 1, потом y пар карточек с 3 и 1, и z пар карточек с 3 и 2. Значения $x.y,z$ должны удовлетворять системе уравнений: $x+y=a, x+z=b, y+z=c$, решая которую, находим: $x=\dfrac{a+b-c}{2}=50-c, y=\dfrac{a-b+c}{2}=50-b, z=\dfrac{-a+b+c}{2}=50-a$. По условию, все они неотрицательны. Если $y \ne 0$, то запрещённых сочетаний этот ряд не содержит - там сразу нет соседних карточек с равными числами, а фрагменты из трёх карточек таковы 121, 212, 213,131,313,132,323,232. Если $y=0$, то фрагменты из трёх карточек 121, 212, 213, ,132,323,232.

10 класс

Каждая задача оценивается из 7 баллов

10.1.. Для каждого действительного числа x обозначим через $h(x)$ наибольшее значение функции $f(t)=t-t^2$ на промежутке $(-\infty, x]$. Найти все решения уравнения: $2x^2-3x+3=8h(x)$.

Ответ. $x_1=\dfrac{1}{2}, x_2=1$.

Решение. Функция $f(t)=t-t^2$ возрастает на промежутке $(-\infty,\dfrac{1}{2}]$, достигает максимума $\dfrac{1}{4}$ при $t=\dfrac{1}{2}$ и убывает на промежутке $[\dfrac{1}{2},+\infty)$. Поэтому $8h(x)=\begin{cases} 8f(x), x \le \dfrac{1}{2}, \\ 2, x \ge \dfrac{1}{2}. \end{cases}$ На промежутке $(-\infty,\dfrac{1}{2}]$ получаем уравнение $2x^2-3x+3=8x-8x^2 \Leftrightarrow 10x^2-11x+3=0$, имеющая корни $x=\dfrac{1}{2}, x=\dfrac{3}{5}$, второй из которых – посторонний. На промежутке $[\dfrac{1}{2},+\infty)$

получаем уравнение $2x^2-3x+3=2 \Leftrightarrow 2x^2-3x+1=0$, имеющая корни $x=\frac{1}{2}, x=1$, лежащие в рассматриваемом промежутке. Объединяя, получаем ответ $x_1=\frac{1}{2}, x_2=1$.

Критерии оценивания. Если в первой части решения не говорится о том, что корень $x=\frac{1}{2}$ в этом случае посторонний - минус 1 балл.

10.2..Найти минимальное натуральное число, которое можно получить в виде дроби $\frac{100x}{y}$, где x, y - некоторые двузначные числа.

Ответ. 15.

Решение. Пусть $d \le 9$ - наибольший общий делитель двузначных чисел x, y, и $x=da, y=db$, где $a,b \ge 2$ - взаимно простые одно- или двузначные числа. Дробь $\frac{a}{b}$ несократима, а дробь $\frac{100a}{b}$ является целым числом, поэтому b .- делитель числа 100. Значит, b равен одному из чисел 1,2,4,5,10,20,25,50.

Если $b \le 5$, то дробь $\frac{100a}{b}$ не меньше 20, что, как мы дальше увидим, слишком много.

Если $b=10$, то при $a \ge 2$ дробь $\frac{100a}{b}$ не меньше 20.

Если $b=20$, то при $a \ge 4$ дробь $\frac{100a}{b}$ не меньше 20, а при $a=2$ дробь $\frac{a}{b}$ не является несократимой. При $a=3$ получим $\frac{100a}{b}=\frac{100\cdot 3}{20}=\frac{100\cdot 12}{80}=15$- целое значение дроби $\frac{100x}{y}$ при $x=12, y=80$.

Если $b=25$, то при $a \ge 4$ дробь $\frac{100a}{b}$ не меньше 16. При $a=2{,}3$, ввиду того, что здесь $d \le 3$, число $x=da$ не может быть двузначным.

Если $b=50$, то при $a \ge 8$ дробь $\frac{100a}{b}$ не меньше 16. При остальных значениях a число $x=da$ не может быть двузначным, так как здесь $d=1$. Таким образом. найденное нами значение 15 является минимальным для дроби из условия.

Критерии оценивания. Только приведён пример $\frac{100\cdot 12}{80}=15$: 1балл. Доказан частный случай типа «дробь не равна 11»: 1 балл.

10.3. Доказать, что для любых $0 \le x, y \le 1$ выполнено неравенство $\frac{x}{1+y}+\frac{y}{1+x} \le 1$.

Доказательство 1. Заменим в знаменателях дробей левой части неравенства единицы на $0 \le x \le 1$ и $0 \le y \le 1$ соответственно. При этом знаменатели дробей не увеличатся и останутся положительными, а значения дробей не уменьшатся: $\frac{x}{1+y}+\frac{y}{1+x} \le \frac{x}{x+y}+\frac{y}{y+x}=\frac{x+y}{x+y}=1$ - что и требовалось доказать.

Доказательство 2. Избавимся от знаменателей и приведём подобные, получим $x^2+y^2\le 1+xy$. Если $x\le y$, то требуемое неравенство получается сложением неравенств $y^2\le 1$ и $x^2\le xy$. Если $y\le x$, то требуемое неравенство получается сложением неравенств $x^2\le 1$ и $y^2\le xy$.

10.4.. Точка *M* – середина стороны *AB* треугольника *ABC*. На отрезке *CM* выбраны точки *P* и *Q* так, что *P* ближе к M, *Q* ближе к *C* и *CQ=2PM*. Оказалось, что $BQ=AC$. Найти величину угла *APM*.

Ответ. $APM=90^\circ$.

Решение. Отметим на продолжении CM за M точку T такую, что MT=MP. При этом отрезки AB и TP делятся точкой пересечения M пополам, значит четырёхугольник ATBP является параллелограммом. В частности, отрезки AP и BT равны и параллельны. Рассмотрим треугольники BQT и APC. В них стороны BQ и AC равны по условию, QT и PC равны по построению, стороны AP и BT равны по доказанному выше. Следовательно, треугольники BQT и APC равны, значит равны их соответственные углы BTQ и APC. Из параллельности AP и BT следует, что сумма этих углов равна 180°, поэтому каждый из них равен 90°. Тогда и угол APM, дополнительный к APC, равен 90°.

Замечание. Другое решение получится, если отметить на продолжении CM за M точку E такую, что ME=MQ и заметить, что треугольник ACE равнобедренный, а P – середина его основания.

Критерии оценивания. Делается попытка отложить MT=MP или ME=MQ без продвижения: 1 балл. Замечается при этом, что треугольник ACE равнобедренный: ещё 1 балл.

10.5. Каждый из 10 сортов конфет попробовали больше половины учащихся класса. Докажите, что можно выбрать некоторых трёх учащихся таких, что каждый сорт конфет попробовал хотя бы один из них.

Доказательство. Пусть в классе учатся N школьниц и школьников, каждый сорт конфет попробовали больше половины из них, поэтому количество пар (учащийся, опробованный им сорт конфет) больше 10N/2=5N. Следовательно, есть учащийся А, попробовавший более, чем 5N/N=5, то есть не менее, чем 6 сортов конфет. Если А попробовал все сорта, добавив к А любых двух учащихся, получим искомую в условии тройку.

Если А попробовал не все сорта конфет, рассмотрим сорта, которые не пробовал А, их не больше четырёх, и всех учащихся, пробовавших хотя бы один из этих сортов. Повторяя предыдущее рассуждение, находим среди них учащегося Б., попробовавшего не меньше 3 из оставшихся сортов. Если А и Б вместе опробовали все сорта, добавив к ним любого учащегося, получим искомую в условии тройку.

Если остался сорт, не опробованный ни одним из А и Б, берём любого учащегося В, пробовавшего этот сорт (он существует по условию) и получим искомую в условии тройку А, Б и В.

Критерии оценивания. Доказано, что есть учащийся А, попробовавший не менее, чем 6 сортов конфет: 2 балла.

11 класс

Каждая задача оценивается из 7 баллов

11.1..Найти все решения уравнения $\sqrt{4-x^2}+\sqrt{1+4x}+\sqrt{x^2+y^2-2y-3}=\sqrt{x^4-16}-y+5$.

Ответ. $x=2, y=\dfrac{3}{2}$.

Решение. Найдём области допустимых значений выражений под каждым корнем. Для первого, второго и четвёртого корня – это $x \in [-2,2], x \in [-\frac{1}{4},+\infty)$ и $x \in (-\infty,2] \cup [2,+\infty)$ соответственно. Пересечение этих множеств даёт $x = 2$. Подставляем это значение в уравнение, получаем $\sqrt{y^2 - 2y + 1} = |y-1| = 2 - y$. При $y \ge 1$, раскрывая модуль, находим $y = \frac{3}{2}$, при $y < 1$ решений нет. Таким образом, ответом будет $x = 2, y = \frac{3}{2}$.

Критерии оценивания. Получение лишних корней: минус 2 балла.

11.2..Пусть– a,b,c - длины сторон произвольного треугольника. Доказать, что $2(ab + ac + bc) > a^2 + b^2 + c^2$.

Доказательство. Решение 1. Ввиду неравенства треугольника имеем: $a + b > c, a + c > b, b + c > a$. Перепишем это в виде $a > |b - c|, c > |b - a|, b > |a - c|$. Обе части каждого неравенства положительны, возведём их все в квадрат и сложим, получив: $a^2 + b^2 + c^2 > b^2 + c^2 - 2bc + a^2 + c^2 - 2ac + a^2 + b^2 - 2ab \Leftrightarrow 2(ab + ac + bc) > a^2 + b^2 + c^2$, что и требовалось доказать.

Решение 2. Запишем три теоремы косинусов для треугольника ABC: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A, b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B, c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$. Сложив эти три равенства, получим: $a^2 + b^2 + c^2 = 2ab\cos C + 2ac\cos B + 2bc\cos A$. Числа $2ab, 2ac, 2bc$ положительны, а каждый из множителей $\cos C, \cos B, \cos A$ не превосходит 1, поэтому при замене этих множителей в правой части на 1, она не уменьшится и получится требуемое неравенство $a^2 + b^2 + c^2 \le 2ab + 2ac + 2bc$.

Критерии оценивания. Неупоминание о положительности сторон неравенства про возведении в квадрат **или** о положительности $2ab, 2ac, 2bc$ при замене множителей $\cos C, \cos B, \cos A$ в правой части на 1: минус 1 балл.

11.3. Пусть Q и P – основания перпендикуляров, опущенных из вершины B треугольника ABC на биссектрисы его углов A и C соответственно. Доказать, что прямая PQ параллельна стороне AC.

Доказательство. Обозначим за I точку пересечения биссектрис AA_1, BB_1, CC_1 треугольника ABC.. а величины его углов за A,B,C. Тогда величина угла IBC равна B/2, величина угла ICB равна C/2, величина внешнего угла CIB_1 треугольника IBC равна сумме двух предыдущих углов, то есть (B+C)/2. Угол CIB_1 равен вертикальному с ним углу BIC_1= BIP, поэтому в прямоугольном треугольнике PBI третий угол PBI равен 90-(B+C)/2=A/2. Аналогично, угол QBI равен C/2. Углы BPI и BQI прямые, поэтому четырёхугольник BPIQ вписанный в окружность с диаметром BI. Следовательно, вписанные углы PBI и PQI равны, как опирающиеся на одну хорду PI. Значит, накрест лежащие углы PQI=PQA и QAC равны A/2, поэтому прямые MQ и AC параллельны.

11.4..Найти все натуральные числа N такие, что N=p(N)+s(N), где p(N)-произведение всех цифр в десятичной записи N, а s(N)- сумма всех цифр в десятичной записи N.

Ответ. Все двузначные числа, оканчивающиеся на 9: 19,29,…,99.

Решение. Пусть $N = \overline{a_n a_{n-1} ... a_0}$ - десятичная запись $n+1$ - значного числа N, очевидно N не менее, чем двузначно, поэтому $n \ge 1$. По условию $N = \overline{a_n a_{n-1} ... a_0} = 10^n a_n + 10^{n-1} a_{n-1} + ... + a_0 = a_n a_{n-1} ... a_0 + a_n + a_{n-1} + ... + a_0$. Ввиду того, что $10^n a_n > 9^n a_n \ge a_n a_n a_{n-1} ... a_0$, отсюда следует $a_n + a_{n-1} + ... + a_0 > 10^{n-1} a_{n-1} + ... + a_0$. Перепишем это в виде $a_n > (10^{n-1}-1)a_{n-1} + ...(10-1)a_1$. Если среди цифр N нет нулей, последнее неравенство при $n \geq 2$ невозможно, поэтому $n=1$. Тогда $N = \overline{ab} = 10a + b = ab + a + b \Leftrightarrow 9a = ab \Leftrightarrow b = 9$, a - любое, получаем серию ответов 19,29,…,99.

Если одна из цифр N равна нулю, то $N = \overline{a_n a_{n-1}...a_0} = 10^n a_n + 10^{n-1} a_{n-1} + ... + a_0 = a_n + a_{n-1} + ... + a_0$, что невозможно при $n \geq 1$. Значит, этот случай новых ответов не прибавляет.

Критерии оценивания. Только приведены все ответы: 2 балла. Только приведён какой-то ответ: 1 балл. Проверка ответов, полученных как в решении не обязательна.

11.5. Каждая из 15 команд сыграла с каждой другой ровно один раз. Докажите, что хотя бы в одной из игр встретились две команды, сыгравшие перед этим в сумме нечётное число игр.

Доказательство. Каждая команда провела на турнире по 14 игр, при этом перед первой из них она провела 0 встреч, перед второй – одну встречу, …, перед последней – тринадцать игр. Всего в турнире было сыграно 15·14/2=105 игр. Для каждой игры в турнире запишем пару чисел: первое – количество игр, сыгранных перед этой игрой одной из встречающихся команд, а второе - количество игр, сыгранных перед этой игрой второй из встречающихся команд. Всего получится 210 чисел, которые в совокупности являются объединением 15-ти копий множества 0,1,2,..,13, по одной копии для каждой команды. Следовательно. сумма всех этих чисел равна 15·(0+1+…+13)=15·13·7 – нечётна. С другой стороны, та же сумма равна сумме 105 чисел, являющихся суммами чисел в парах. Значит, хотя бы одна из сумм чисел в парах нечётна, что и требовалось доказать.

Критерии оценивания. Найдено общее число игр в турнире: 1 балл. Рассматривается сумма 210 чисел, которые в совокупности являются объединением 15-ти копий множества 0,1,2,..,13, по одной копии для каждой команды: 2 балла.