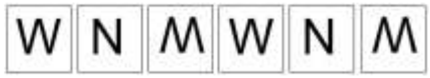
Заключительный этап Всесибирской олимпиады школьников 2016-2017 г.г. по математике
7 класс

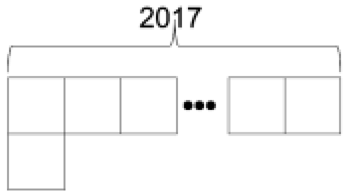
Время работы 4 астрономических часа *Каждая задача оценивается в 7 баллов*

7.1. Пароход “Раритет” стремительно идёт ко дну. Если капитан Алексей раздаст ровно 2017^{2017} указаний своим 26 матросам, то пароход получится спасти. Каждому следующему матросу Алексей может дать на 2 указания меньше или на 2 указания больше, чем предыдущему. Сможет ли Алексей спасти пароход?

7.2. У Данила есть 6 карточек с буквами, из которых он смог сложить слово WNMWNM, изображённое на картинке. Заметим, что данное слово обладает замечательным свойством: если его перевернуть на 180 градусов, получится оно же. Сколько всего слов, обладающих таким свойством, может составить Данил, используя сразу все 6 карточек?



7.3. Клетки бесконечной клетчатой плоскости покрасили в чёрный и белый цвета таким образом, что в любом уголке из 2018 клеток (даже повёрнутом и/или перевёрнутом) белых и чёрных клеток поровну. Верно ли, что все клетки плоскости покрашены в шахматном порядке?



7.4. В треугольнике со сторонами длиной a,b и c напротив стороны c лежит угол в 120 градусов. Докажите, что из отрезков длины a, c и $a+b$ можно составить треугольник.

7.5. Есть 12 монет, из которых одна, фальшивая, легче остальных. Также имеются чашечные весы без гирь. Про них известно, что они либо обычные (то есть на них всегда перевешивает тяжёлая кучка), либо волшебные (на таких всегда перевешивает лёгкая кучка, равенство показывается правильно), но неизвестно, волшебные они всё-таки, или обычные. Можно ли за три взвешивания на таких весах найти фальшивую монету?

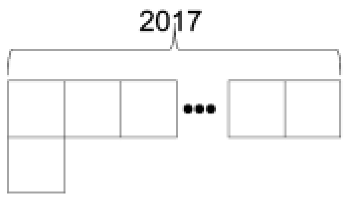
Задача не считается решенной, если приводится только ответ!

Заключительный этап Всесибирской олимпиады школьников 2016-017 г.г. по математике
8 класс

Время работы 4 астрономических часа *Каждая задача оценивается в 7 баллов*

8.1. В вагон загрузили несколько килограммов яблочного джема, среди которого было 20% хорошего и 80% плохого. Каждый день половина имеющегося плохого джема сгнивала, и его выбрасывали. Через несколько дней оказалось, что в вагоне стало 20% плохого и 80% хорошего джема. Сколько дней прошло после загрузки?

8.2. Однажды Алексей и Данил играли в такую игру. Если на доске записано некоторое число x, то его можно стереть, а вместо него записать $2x$ или x-1000. Проигрывает тот, кто получил число не больше 1000 или не меньше 4000. Оба игрока стремятся победить. В какой-то момент ребята перестали играть. Кто проиграл, если первым числом было 2017?



8.3. Клетки доски 4028 на 4028 покрашены в чёрный и белый цвет таким образом, что в любом уголке из 2018 клеток (даже повёрнутом и/или перевёрнутом) белых и чёрных клеток поровну. Верно ли, что все клетки обязательно покрашены в шахматном порядке?

8.4. В треугольнике ABC провели биссектрису BE. Оказалось, что $BC + CE = AB$. Докажите, что в треугольнике ABC есть два угла, один из которых в два раза больше другого.

8.5. В списке *1,2,...,2016* отметили два числа $a < b$, разделив ними ряд на 3 части (возможно, некоторые из частей не содержали чисел вообще). После этого список перемешали следующим образом: a и b остались на местах, а ни одно из других 2014 чисел не осталось в той же части, где было изначально. Сколькими способами можно было выбрать a и b?

Задача не считается решенной, если приводится только ответ!

Заключительный этап Всесибирской открытой олимпиады школьников 2016-2017 г.г. по математике 9 класс

Время работы 4 астрономических часа *Каждая задача оценивается в 7 баллов*

9.1. На сторонах AB и AD квадрата ABCD внутрь него построены равносторонние треугольники ABK и ADM соответственно. Докажите, что треугольник CKM тоже равносторонний.

9.2. За круглым столом расселись 15 мальчиков и 20 девочек. Оказалось, что количество пар сидящих рядом мальчиков в полтора раза меньше, чем количество пар сидящих рядом девочек. Найти количество пар мальчик – девочка, сидящих рядом.

9.3. Можно ли представить число 2017 в виде суммы двух натуральных чисел, сумма цифр одного из которых вдвое больше суммы цифр другого?

9.4. Какое максимальное число треугольников с вершинами в вершинах правильного 18-ти угольника можно отметить так, чтобы никакие две различных стороны этих треугольников не были параллельны? Треугольники при этом могут пересекаться и иметь общие вершины, совпадающие отрезки считаются параллельными.

9.5. Укажите любой способ расстановки всех натуральных чисел от 1 до 100 включительно в ряд в некотором порядке так, чтобы сумма любых n из них, стоящих подряд, не делилась на n при всех $2 \le n \le 100$.

Задача не считается решенной, если приводится только ответ!

Заключительный этап Всесибирской открытой олимпиады школьников 2016-2017 г.г. по математике 10 класс

Время работы 4 астрономических часа *Каждая задача оценивается в 7 баллов*

10.1. Решить в действительных числах систему уравнений: $x^3+y = 2x, y^3 + x = 2y$.

10.2. Трое играют в настольный теннис, причем игрок, проигравший партию, уступает место игроку, не участвовавшему в ней. В итоге оказалось, что первый игрок сыграл 21 партию, а второй 10. Сколько партий сыграл третий игрок?.

10.3.В четырёхугольнике ABCD равные диагонали AC и BDпересекаются в точке O, а точки P и Q –середины сторон AB и CD соответственно. Докажите, что биссектриса угла AODперпендикулярна отрезку PQ.

10.4. Назовём *змейкой* в выпуклом n-угольнике незамкнутую, не самопересекающуюся ломаную из $n-1$звеньев, множество вершин которой совпадает с множеством всех вершин n-угольника. Найти число различных змеек в n-угольнике. (Змейки равны, если совпадают, как геометрические места точек. Например, число змеек в треугольнике равно 3)

10.5.На доске написаны 10 натуральных чисел, среди которых могут быть равные, причём квадрат каждого из них делит сумму всех остальных. Какое наибольшее количество различных чисел может быть среди выписанных?

Задача не считается решенной, если приводится только ответ!

Заключительный этап Всесибирской открытой олимпиады школьников 2016-2017 г.г. по математике 11 класс

Время работы 4 астрономических часа *Каждая задача оценивается в 7 баллов*

11.1. Могут ли при каком-то значении x оба числа$\cos x+\sqrt{2}$ и $\cos 2x+\sqrt{2}$ быть рациональными?

11.2.Решить в действительных числах систему уравнений $x^2+xy+y^2=4, x^4+x^2y^2+y^4=8$.

11.3. Внутри остроугольного треугольника ABC выбрали точку P, отличную от O— центра описанной окружности треугольника ABC, и такую, что угол PAC равен углу PBA и угол PAB равен углу PCA. Доказать, что угол APO — прямой.

11.4.Доказать, что рёбра произвольного тетраэдра (треугольной пирамиды) можно разбить некоторым образом на три пары так, что существует треугольник, длины сторон которого равны суммам длин рёбер тетраэдра в этих парах.

11.5.Найти все натуральные n, для которых все натуральные числа от 1 доn включительно можно записать в ряд в таком порядке, что сумма первых слева k чисел будет либо делить сумму всех $n-k$ оставшихся, либо делиться на неё при любом k от 1 до $n-1$.

Задача не считается решенной, если приводится только ответ!