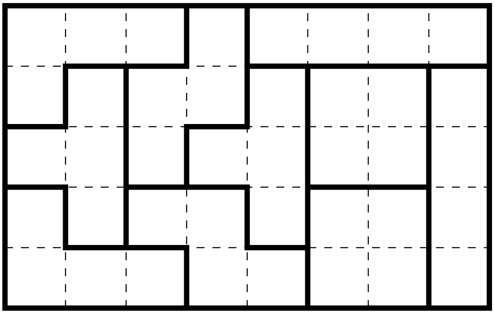
Всесибирская открытая олимпиада школьников 2024-2025 г.г. по математике
Заключительный этап. 8 класс
Решения

Все задачи оцениваются из 7 баллов. Каждое верное решение, вне зависимости от длины и степени красивости, оценивается в 7 баллов

8.1. Дан клетчатый прямоугольник 5×8. Разрежьте его по линиям сетки на 10 частей одинаковой площади таким образом, чтобы каждая часть встречалась в разрезании максимум дважды. Если части отличаются поворотом и/или отражением, они считаются одинаковыми.

Решение. Например, можно разрезать следующим образом:



Замечание. Догадаться до примера можно было следующим образом. Площадь прямоугольника равна 40, и если его нужно разрезать на 10 частей одинаковой площади по линиям сетки, каждая часть состоит из 4 квадратиков 1×1. Всего таких фигур как раз 5, они называются *тетрамино*, и их можно увидеть в примере выше.

Критерии. Любой верный пример — 7 баллов.
Нет верного примера, но перечислены все 5 возможных фигур — 1 балл.

8.2. За круглый стол переговоров сели гномы и эльфы: суммарно 100 участников. Эльфы всегда лгут, а гномы всегда говорят правду, но иногда ошибаются. Каждый пришедший заявил, что сидит между гномом и эльфом, и при этом ровно один гном ошибся. А сколько гномов за столом могло быть всего?

Решение. Для начала докажем, что никакие два эльфа не сидят рядом. Предположим, это не так, и всё-таки нашлось место, где несколько эльфов сидят подряд. Рассмотрим крайнего из них. С одной стороны от него сидит другой эльф, и, чтобы лгать, с другой стороны от крайнего тоже должен быть эльф. Но это противоречит тому, что мы выбрали крайнего эльфа, то есть описанная ситуация невозможна (ещё противоречия бы не возникло, если бы за столом сидели только эльфы, но по условию гномы были, и это тоже невозможно).

Рассмотрим любой промежуток между двумя соседними эльфами. Если в нём один гном, то он ошибается. Если гномов два, то они говорят правду, а если больше, то врут те гномы, которые стоят не с края. Значит, единственный ошибающийся гном сидит либо между двумя эльфами, либо в середине трёх подряд идущих гномов.

Пусть всего эльфов n. Тогда промежутков тоже n, в $n-1$ из них сидит по 2 гнома, а в оставшемся их либо 1, либо 3. Получаем два возможных уравнения

$$n + 2(n-1) + 1 = 100 \text{ или } n + 2(n-1) + 3 = 100.$$

Первое из них равносильно $3n = 101$, и не имеет решений, так как 101 не делится на 3. Во втором случае имеем $3n = 99$, откуда $n = 33$, а гномов всего $100 - 33 = 67$.

Критерии. Только ответ — 0 баллов.
Только ответ с примером рассадки — 1 балл.
Доказано, что нет сидящих рядом эльфов — 2 балла.

8.3. На доске написаны пять последовательных натуральных чисел. Вася утверждает, что их произведение в 120 раз больше некоторого шестизначного числа, имеющего вид $ABABAB$. То есть, у него в разрядах десятков, тысяч и сотен тысяч стоит ненулевая цифра A, а в остальных разрядах стоит цифра B, не обязательно отличающаяся от A. Найдите все возможные наборы чисел на доске, при которых слова Васи являются правдой.

Решение. Заметим, что $ABABAB = 10101 \cdot AB = 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37 \cdot (10A+B)$. Поэтому, если произведение пяти последовательных натуральных чисел делится на $ABABAB$, то оно делится и на 37. Теперь, если максимальное из них хотя бы 74, то произведение чисел на доске уже не меньше чем

$$70 \cdot 71 \cdot 72 \cdot 73 \cdot 74 > 70^5 = 16807 \cdot 10^5 > 120 \cdot 10^7 > 120 \cdot ABABAB$$

для любых A и B, и ровно в 120 раз больше быть никак не может. Значит, для делимости на 37, среди пяти последовательных чисел должно быть само число 37. Далее заметим, что для делимости на 13 должно присутствовать число 39, так так других чисел, делящихся на 13, в пределах 5 чисел от 37 нет. Для делимости на 7 должно быть либо 35, либо 42. Но во втором случае тогда присутствуют все числа от 37 до 42 включительно, а их уже шесть. Итого, должны присутствовать все числа от 35 до 39, и их как раз пять. Мы сократили перебор до единственного варианта, значит, осталось его проверить.

$$\begin{aligned} 35 \cdot 36 \cdot 37 \cdot 38 \cdot 39 &= (5 \cdot 7) \cdot (3 \cdot 12) \cdot 37 \cdot (2 \cdot 19) \cdot (3 \cdot 13) = \\ &= (3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37) \cdot (5 \cdot 12 \cdot 2) \cdot 3 \cdot 19 = 10101 \cdot 120 \cdot 57 = 120 \cdot 575757, \end{aligned}$$

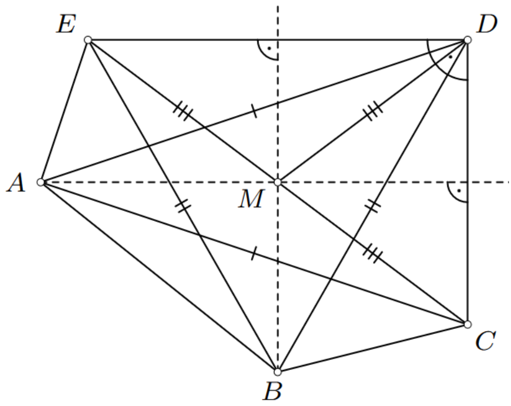
то есть он действительно подходит и является ответом.

Критерии. Только ответ — 0 баллов.
Только верный ответ с проверкой, что он подходит — 1 балл.
Число $ABABAB$ разложено на множители — 2 балла.
Доказано, что среди чисел обязательно есть 37 — ещё 2 балла.
Доказано, что среди чисел обязательно есть 39 — ещё 1 балл.
При отсутствии проверки того, что полученный набор подходит — снимается 1 балл.

8.4. Дан выпуклый пятиугольник $ABCDE$, в котором $\angle CDE = 90°$, $AC = AD$ и $BD = BE$. Докажите, что площадь треугольника ABD равна площади четырёхугольника $ABCE$.

Решение. Пусть M — середина EC. Так как медиана, проведённая к гипотенузе, равна её половине, получаем $ME = MD = MC$.

Рассмотрим прямую MA. Так как и M, и A равноудалены от концов отрезка CD, эта прямая является серединным перпендикуляром к CD, откуда, в частности, получаем $AM \parallel DE$ в силу того, что $ED \perp CD$. Аналогично, прямая MB является серединным перпендикуляром к отрезку ED, и $MB \parallel CD$.



Заметим теперь, что в треугольниках AED и MED равны основания ED, а высоты, опущенные на эту сторону, равны в силу того, что $AM \parallel ED$. Значит, равны их площади, что мы будем обозначать как $S_{AED} = S_{MED}$. Аналогично, $S_{BDC} = S_{MDC}$. Итак,

$$S_{ABD} = S_{ABCDE} - S_{AED} - S_{BCD} = S_{ABCDE} - S_{MED} - S_{MDC} = \\ = S_{ABCDE} - (S_{MED} + S_{MDC}) = S_{ABCDE} - S_{CED} = S_{AECB},$$

что и требовалось доказать.

Критерии. Доказан хотя бы один факт из $AM \parallel ED$ и $BM \parallel CD$ — 2 балла. Доказан хотя бы один факт из $S_{AED} = S_{MED}$ и $S_{BCD} = S_{MCD}$ — ещё 2 балла.

8.5. Дано натуральное число k. У Антона дома живут 100 котов, каждый из которых согласен есть ровно k различных кормов. Известно, что любые 20 котов имеют общий корм, который они согласны есть, но нет ни одного корма, который бы были согласны есть все коты одновременно. Найдите минимально возможное значение k.

Решение. Выберем произвольного кота X, который согласен есть корма $a_1, a_2, \ldots, a_k$. По условию, никакой корм не согласны есть все коты одновременно, поэтому найдётся такой кот Y_1, что он не ест корм a_1. Аналогично, найдётся кот Y_2, который не ест корм a_2, и так далее.

Рассмотрим набор котов $X, Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$. Заметим, что всего их не более чем $k+1$ (некоторые животные могут совпадать), и при этом у них нет общего корма, который бы они все согласны бы были есть. Если бы общее количество котов в этом наборе было не больше 20, то их можно бы было дополнить случайными котами до 20 штук, и это бы противоречило условию, поэтому $k + 1 > 20$, откуда $k \geqslant 20$.

Приведём теперь пример того, что k может быть равно 20. Для этого пусть у нас всего 21 различных кормов, и

- Первый кот ест все корма, кроме первого;

- Второй кот ест все корма, кроме второго;

  ...

- Двадцатый кот ест все корма, кроме двадцатого;
- Все оставшиеся коты едят все корма, кроме 21-го.

Несложно видеть, что этот пример подходит, то есть ответ $k = 20$.

Критерии. Только ответ — 0 баллов.
Только оценка на $k \geqslant 20$ — 3 балла.
Только пример для $k = 20$ — 3 балла.