Решения и критерии проверки задач второго этапа Всесибирской олимпиады школьников 2020-2021 гг. по математике 10 класс

10.1. Найти все тройки действительных чисел (x, y, z), являющиеся решениями системы уравнений $\begin{cases} x^2 + y + z = 1, \\ x + y^2 + z = 1, \\ x + y + z^2 = 1. \end{cases}$

Ответ. $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (-1-\sqrt{2}, -1-\sqrt{2}, -1-\sqrt{2}), (-1+\sqrt{2}, -1+\sqrt{2}, -1+\sqrt{2})$.

Решение. Разложив разность первого и второго уравнений множители, получим $(x-y)(x+y-1)=0$, значит для пары переменных x, y из тройки решений системы (x, y, z) выполнено одно из двух равенств $x = y$ или $x + y = 1$. То же самое верно и для пар переменных y, z и x, z. Если второе равенство выполнено хотя бы для одной из этих пар, например $x + y = 1$, тогда из третьего уравнения $z = 0$ и из первого уравнения $x^2 + 1 - x = 1 \Leftrightarrow x^2 - x = 0$, откуда либо $x = 1, y = z = 0$, либо $x = 0, y = 1, z = 0$. Объединив такие тройки по всеем парам переменных, получим три решения системы, в каждом из которых одно переменное равно 1, а остальные 0.

Если для каждой пары переменных из решения системы выполнено первое уравнение, то все переменные равны между собой и равны любому из корней уравнения $x^2 + 2x - 1 = 0$, то есть одному из чисел $-1+\sqrt{2}, -1-\sqrt{2}$, что даёт ещё два решения системы.

Критерии проверки. Ответы: 2 балла. Доказательство, что других ответов нет: 5 баллов.

10.2. Сумма трёх неотрицательных чисел a, b, c не превосходит $\frac{1}{2}$. Доказать, что

$(1-a)(1-b)(1-c) \geq \frac{1}{2}$.

Доказательство. Из условия в частности следует, что каждое из чисел a, b, c меньше 1. Раскроем скобки: $(1-a)(1-b)(1-c) = 1-(a+b+c)+(ab+ac+bc)-abc$. Оценим выражение в правой части, по условию, $1-(a+b+c) \geq 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, а $ab+ac+bc-abc = ab(1-c)+ac+bc \geq$ $\geq ac+bc \geq 0$, поэтому всё выражение не меньше $\frac{1}{2}$, что и требовалось доказать.

10.3. Пусть М – наименьшее множество чисел такоё, что а) М содержит 1, б) если М содержит число x, то М обязательно содержит также числа $\frac{1}{1+x}, \frac{x}{1+x}$. Из каких в точности чисел состоит М?

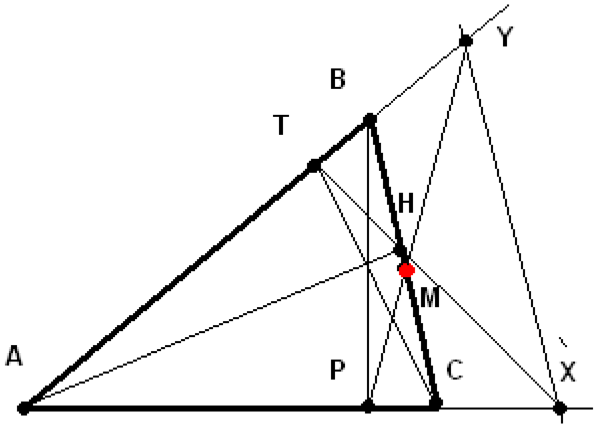
Ответ. М – это в точности множество всех положительных рациональных чисел, не превосходящих 1.

Решение. С одной стороны понятно, что, если x - положительное рациональное число, то и оба числа $\frac{1}{1+x},\frac{x}{1+x}$ - тоже рациональные и лежат в интервале $(0,1)$, поэтому минимальное множество М, состоящее только из чисел, получающихся из 1 последовательностями операций из пункта б) условия, содержит только рациональные числа из интервала $(0,1]$.

Покажем, что любое рациональное число из интервала. $(0,1]$ лежит во множестве М. Для 1 это верно по условию, дальше рассматриваем только числа, меньшие 1. Любое такое число записывается правильной несократимой дробью $\frac{p}{q}$ для некоторой пары натуральных чисел $p<q$. Допустим, что все правильные дроби, сумма числителя и знаменателя которых меньше $p+q$, уже лежат в М. Для уравнений $\frac{p}{q}=\frac{1}{1+x}$ и $\frac{p}{q}=\frac{x}{1+x}$ находим решения $x_1=\frac{q-p}{p}$ и $x_2=\frac{p}{q-p}$, которые дают нам числа, из которых дробь $\frac{p}{q}$ может быть получена операцией б) из условия. Ровно одно из найденных решений является правильной дробью: при $q<2p$ это $x_1=\frac{q-p}{p}$, а при $q>2p$ - это $x_2=\frac{p}{q-p}$. В каждом случае найденное решение является правильной дробью из интервала $(0,1)$, сумма числителя и знаменателя которой меньше $p+q$, значит, уже лежащей во множестве М. Ввиду п. б) условия, тогда и дробь $\frac{p}{q}$ тоже лежит в М, что и требовалось доказать.

Критерии проверки.
Ответ и обоснование, что он удовлетворяет условиям а) и б) задачи: 2 балла.
Доказательство, что множество всех положительных рациональных чисел, не превосходящих 1 является минимальным, удовлетворяющим условиям а) и б) задачи : 5 баллов.

10.4. Пусть AH, BP и CT – высоты, а М – середина стороны ВС в остроугольном треугольнике АВС. Прямая РМ пересекает продолжение стороны АВ за вершину В в точке Y, а прямая ТН пересекает продолжение стороны АС за вершину С в точке Х. Доказать, что прямые ВС и XY параллельны.



Доказательство. Докажем, что треугольники APY и ATX подобны. Угол A у них общий, поэтому достаточно показать равенство углов APY и ATX. В прямоугольном треугольнике CBP точка М – середина гипотенузы, поэтому треугольник PMC равнобедренный, следовательно $\angle BPM = 90 - \angle MPC$ $= 90 - \angle MCP = 90 - C$. Значит, $\angle APY =$ $= 90 + 90 - \angle MPC = 180 - C$.

Далее, углы АТС и АНС прямые, опирающиеся на отрезок АС, их вершины Т и Н лежат на окружности с диаметром АС, следовательно, четырёхугольник АТНС - вписанный. Тогда $\angle ATX = \angle ATH = 180 - \angle ACH = 180 - C = \angle APY$.

Значит, углы APY и ATX равны и треугольники APY и ATX подобны с коэффициентом, равным отношению длин отрезков AP и AT. В частности, $\frac{AY}{AX} = \frac{AP}{AT}$.

Заметим, что треугольник ATP подобен треугольнику ABC. Действительно, углы CTB и CPB прямые, поэтому четырёхугольник CPTB вписанный, следовательно, $\angle APT = 180 - \angle BTP = 180 - (180 - C) = C$. Аналогично, $\angle ATP = B$, поэтому треугольники ATP и ABC подобны с парами соответственными сторонами AB и AP, AC и AT. Тогда $\frac{AY}{AX} = \frac{AP}{AT} = \frac{AB}{AC}$. По теореме, обратной теореме Фалеса, отсюда следует параллельность прямых BC и XY, что и требовалось доказать.

10.5. Некоторые из 9 вершин правильного 20-ти угольника окрашены в красный цвет. Доказать, что всегда найдутся три красных вершины, образующие равнобедренный треугольник.

Доказательство. Представим все вершины правильного 20-ти угольника, как объединение множеств вершин четырёх правильных пятиугольников, первый пятиугольник содержит вершины с номерами 1,5,9.13,17, второй – с номерами 2,6,10,14,18, третий – с номерами 3,11,15,19, и четвёртый – с номерами 4,8,12,16,20.

Всего окрашенных вершин 9, поэтому хотя бы один из этих пятиугольников содержит не менее трёх отмеченных вершин. Длины сторон и диагоналей правильного пятиугольника могут принимать только два возможных значения (одно – стороны, другое - диагонали), поэтому в любом треугольнике, вершины которого лежат в его вершинах, две стороны равны, то есть он – равнобедренный.

Критерии проверки.

Неполный перебор	0 баллов