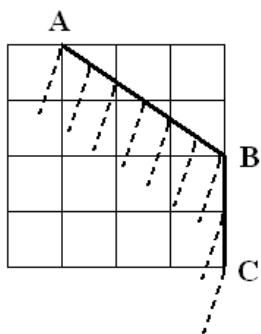
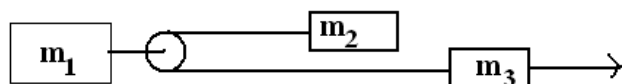


I этап (очный) Всесибирской олимпиады по физике
Задачи 11 класс. (27 октября 2013 г.)



1. Изогнутое под углом лезвие скребка прижато к плоской поверхности по ломаной ABC и движется вдоль поверхности (сторона ячейки квадратной сетки на рис. 10 см, штриховкой показана очищаемая площадь). Какую наибольшую площадь за секунду может очистить скребок, если его скорость $v = 20$ см/с?

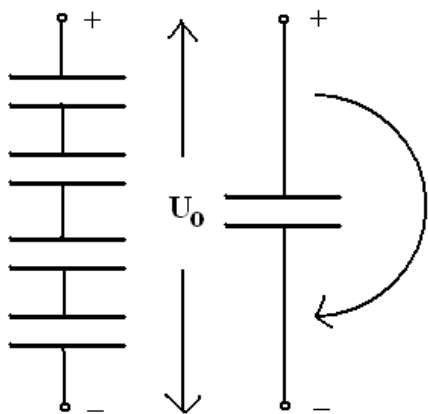


2. На горизонтальном столе лежат бруски с массами m_1 , m_2 , m_3 . К бруску 1 прикреплён невесомый блок. Через него проходит нерастяжимая невесомая нить, связывающая бруски 2 и 3. Исходно все они неподвижны, а нить не провисает. Брусок 3 начинают тянуть вправо вдоль нити, и через некоторое время он приобретает скорость v_3 . Какие скорости к этому моменту приобретут бруски m_1 и m_2 ? Трения нет.



3. В полу имеется плавная выемка глубины H . Одно тело находится вблизи левого края, а другое на плоском дне выемки. Левое тело толкнули. После упругого столкновения тел они оба выбрались из выемки и остановились. Найдите начальную скорость левого тела. Трения нет, ускорение свободного падения g .

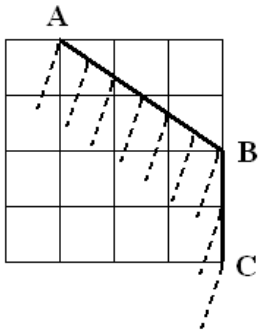
4. Герметичный сосуд, состоящий из двух одинаковых сфер, соединённых тонкой трубкой, заполнен газом до давления P_0 при температуре T_0 . Одну из сфер нагрели до температуры T , сохраняя в другой прежнюю температуру. Каким стало давление газа P в сосуде?



5. Цепочку из четырёх одинаковых последовательно соединённых конденсаторов зарядили до напряжения U_0 , и до того же напряжения зарядили пятый такой же конденсатор. После отключения от источника напряжения «плюс» цепочки соединили с «минусом» пятого конденсатора, а «минус» цепочки – «с плюсом». Какими станут после установления равновесия напряжения на каждом конденсаторе?

Задача не считается решенной, если приводится только ответ!
Желаем успеха!

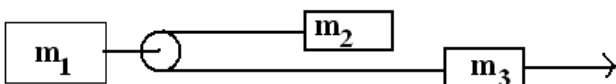
Все задачи оцениваются из 10 баллов. При ином **правильном** и **полном** решении суммарная оценка 10 баллов. При наличии недочётов ориентируйтесь на предложенную поэтапную разбалловку.



1. Изогнутое под углом лезвие скребка прижато к плоской поверхности по ломаной ABC и движется вдоль поверхности (сторона ячейки квадратной сетки на рис. 10 см, штриховкой показана очищаемая площадь). Какую наибольшую площадь за секунду может очистить скребок, если его скорость $v = 20$ см/с?

Рассмотрим перемещение всех точек лезвия за единицу времени. (Построение с пояснениями – 2 балла). Очищенная площадь сумма площадей параллелограммов $ABB'A'$ и $BCC'B'$, где отрезки AA' , BB' и CC' равны v и направлены по скорости (1 балл). Она равна площади одного параллелограмма $ACC'A'$, «заметаемого» замыкающей ломаной AC (с полным доказательством 3 балла). Его площадь максимальна, когда скорость перпендикулярна AC и $dS/dt = |AC|v$ ($1+1 = 2$ балла). Находим $|AC|$ из теоремы Пифагора (1 балл) и числовое значение $dS/dt = 1000 \text{ см}^2/\text{с}$.

Этапы решения	Соотношения	Баллы
Построение области очистки		2
Представление площади суммой площадей, заметаемых отрезками АВ и ВС		1
Равенство её площади, заметаемой АС		3
Условие максимальности площади	v перпендикулярна АС	1
Выражение максимума dS/dt	$dS/dt = AC v$	1
Нахождение $ AC $ из теоремы Пифагора	$ AC = 50$ см	1
Числовое значение dS/dt	$dS/dt = 1000$ см ² /с	1



Решение

Скорости брусков направлены туда, куда тянут нити: v_1 вправо, v_2 влево (1 балл). Связь скоростей из нерастяжимости нити – скорость сближения 1 и 2 равна скорости удаления 3 от 1: $v_1 + v_2 = v_3 - v_1$. (2 балла). Из применений 2-го закона Ньютона к брускam m_1 и m_2 имеем $m_1 a_1 = 2T$ и $m_2 a_2 =$

T , где T натяжение нити (2 + 2 балла). Откуда для скоростей $m_1 v_1 = 2m_2 v_2$ (1 балл). Окончательно из полученных соотношений находим $v_1 = 2m_2 v_3 / (4m_2 + m_1)$ и $v_2 = m_1 v_3 / (4m_2 + m_1)$ (2 балла).

Разбалловка

Этапы решения	Соотношения	Баллы
Указание направления скоростей		1
Связь скоростей из нерастяжимости нити	$v_1 + v_2 = v_3 - v_1$ (аналог)	2
Применение 2-го закона Ньютона к брускам 1 и 2	$m_1 a_1 = 2T$ и $m_2 a_2 = T$	2 + 2
Следствие для скоростей	$m_1 v_1 = 2m_2 v_2$	1
Нахождение искомых скоростей	$v_1 = 2m_2 v_3 / (4m_2 + m_1);$ $v_2 = m_1 v_3 / (4m_2 + m_1)$	2



3. В полу имеется плавная выемка глубины H . Одно тело находится вблизи левого края, а другое на плоском дне выемки. Левое тело толкнули. После упругого столкновения тел они оба выбрались из выемки и остановились. Найдите начальную скорость левого тела. Трения нет, ускорение свободного падения g .

Решение

Пусть массы тел m и M , а скорость левого перед ударом w на дне. Из сохранения импульса и энергии (1+1 = 2 балла) находим скорости сразу после удара: у левого тела $u_1 = (m - M)w / (M + m)$; у правого $u_2 = 2mw / (M + m)$ (1+1 = 2 балла). По модулю эти скорости должны быть равны, поскольку при подъёме на одну и ту же высоты тела останавливаются: $|u_1| = |u_2| = u$ (1 балл). Из этого следует, что $M = 3m$ (1 балл) описанное в условии возможно лишь при таком отношении масс, а $w = 2u$ (1 балл). Из условия остановки при подъёме $u^2 = 2gH$ (1 балл). Из связи скоростей при спуске $w^2 = V^2 + 2gH = 8gH$; $V = \sqrt{6gH}$. (1+1=2 балла).

Разбалловка

Этапы решения	Соотношения	Баллы
Указание на сохранение энергии и импульса на дне		1+1
Нахождение скоростей после удара	$u_1 = (m - M)w / (M + m);$ $u_2 = 2mw / (M + m)$	1 + 1
Равенство этих скоростей по модулю	$ u_1 = u_2 = u$	1
Вывод отношения масс (аналог)	$M = 3m$	1
Связь скоростей до и после удара	$w = 2u$	1
Условие остановки	$u^2 = 2gH$	1
Связь скоростей при спуске	$V^2 = w^2 - 2gH = 6gH$	1
Ответ для искомой скорости	$V = \sqrt{6gH}$	1

4. Герметичный сосуд, состоящий из двух одинаковых сфер, соединенных тонкой трубкой, заполнен газом до давления P_0 при

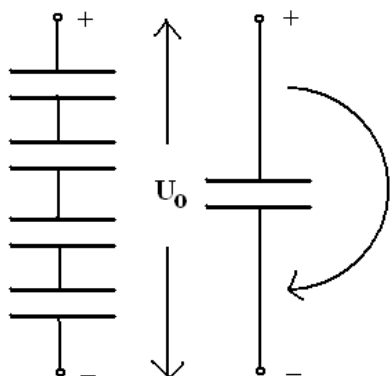
температуре T_0 . Одну из сфер нагрели до температуры T , сохраняя в другой прежнюю температуру. Каким стало давление газа P в сосуде?

Решение

Применим уравнение состояния идеального газа к исходному состоянию для сосуда в целом $2P_0V = \nu RT_0$ (2 балла); для конечного состояния в сферах по отдельности $PV = \nu_1 RT_0$ (2 балла); $PV = \nu_2 RT$ (2 балла); выразим неизменность суммарного числа молей $\nu = \nu_1 + \nu_2$ (2 балла); и найдём конечное давление $P = 2P_0T/(T + T_0)$ (2 балла).

Разбалловка

Этапы решения	Соотношения	Баллы
Применение уравнения состояния а) для исходного состояния	$2P_0V = \nu RT_0$	2
б) для конечного состояния	$PV = \nu_1 RT_0; PV = \nu_2 RT$	2 + 2
Неизменность числа молей	$\nu = \nu_1 + \nu_2$	2
Нахождение искомого давления	$P = 2P_0T/(T + T_0)$	2



5. Цепочку из четырёх одинаковых последовательно соединённых конденсаторов зарядили до напряжения U_0 и до того же напряжения зарядили пятый такой же конденсатор. После отключения от источника напряжения «плюс» цепочки соединили с «минусом» пятого конденсатора, а «минус» цепочки «с плюсом». Какими станут после установления равновесия напряжения на каждом конденсаторе?

Решение

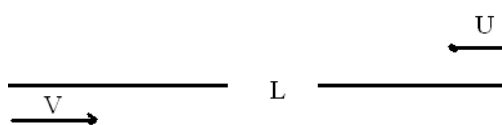
Исходно заряд на положительной пластине 5-го конденсатора CU_0 , где C ёмкость (1 балл), а поскольку напряжение на одном конденсатора цепочки $U_0/4$ (1 балл), то заряд на его положительной пластине $CU_0/4$ (1 балл). После указанного соединения и установления равновесия напряжения на 5-м конденсаторе и цепочке сравняются (1 балл) и тогда $4U_{1-4} = U_5$ (1 балл), где U_{1-4} конечное напряжение на одном из конденсаторов цепочки, а U_5 напряжение на 5-м конденсаторе. Так как суммарный заряд соединённых пластин остаётся прежним, то $CU_5 + CU_{1-4} = CU_0 - CU_0/4$ (сохранение заряда и учёт знака 3 балла). Тогда $U_5 = 0,6U_0$, $U_{1-4} = 0,15U_0$ (3 балла).

Возможно решение из замены цепочки конденсатором ёмкостью $C/4$.

Разбалловка

Этапы решения	Соотношения	Баллы
Напряжение на одном конденсаторе цепочки	$U_1 = U_0/4$	1
Нахождение исходных зарядов	$q_0 = CU_0; q_1 = CU_0/4$	1 + 1
Равенство конечных напряжений		1
Связь напряжений	$4U_{1-4} = U_5$	1
Сохранение заряда с учётом знака	$CU_5 + CU_{1-4} = CU_0 - CU_0/4$	3
Нахождение искоемых напряжений	$U_5 = 0,6U_0, U_{1-4} = 0,15U_0$	3

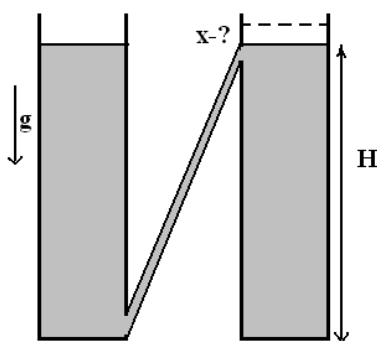
I этап (очный) Всесибирской олимпиады по физике
Задачи 10 класс. (27 октября 2013 г.)



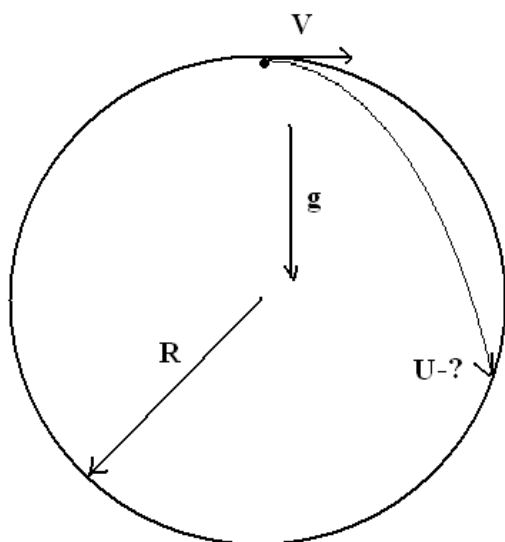
1. Вдоль забора на одинаковых расстояниях от него идут навстречу два пешехода со скоростями V и U , $V > U$. Найдите наибольшее время, в течение которого один пешеход может видеть другого через пролом длины L в заборе.

2. Самолёт с места старта летит с постоянной по величине и направлению скоростью. На высоте h от него оторвалась бомба, которая в момент своего наибольшего подъёма достигла высоты H . На какой высоте в этот момент находился самолет? Влиянием воздуха на движение бомбы пренебречь.

3. Однородный стержень веса P висит на 6 совершенно одинаковых упругих резинках, привязанных верхними концами к горизонтальному потолку. Одна резинка соединена с левым концом стержня, две – с серединой, три с правым концом стержня. Все резинки вертикальны. Найдите натяжения всех резинок.



4. Одинаковые вертикальные цилиндры соединены тонкой наклонной трубкой. Они заполнены холодной водой плотности ρ_0 до уровня верхнего отверстия трубки на высоте H от дна. Воду в правом цилиндре нагревают так, что плотность воды уменьшается в нём до ρ . В левом цилиндре и наклонной трубке плотность воды остаётся прежней. На какую высоту x поднимется уровень воды в правом цилиндре?

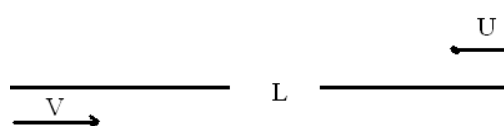


5. В сфере радиуса $R = 3\text{ м}$ в верхней точке находится небольшое тело. Ему сообщают горизонтальную скорость $V = 5\text{ м/с}$. Какова скорость тела перед ударом о стенку сферы? Ускорение свободного падения $g \cong 10\text{ м/с}^2$.

*Задача не считается решенной, если приводится
только ответ!
Желаем успеха!*

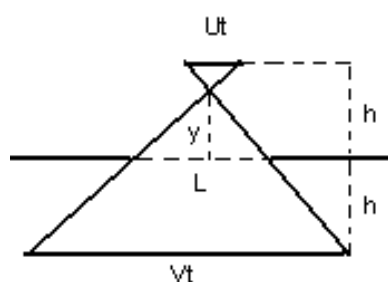
Возможные решения и разбалловка 10 класс

Все задачи оцениваются из 10 баллов. При ином **правильном** и **полном** решении суммарная оценка 10 баллов. При наличии недочётов ориентируйтесь на предложенную поэтапную разбалловку.



1. Вдоль забора на одинаковых расстояниях от него идут навстречу два пешехода со скоростями V и U , $V > U$. Найдите наибольшее время, в течение которого один пешеход может видеть другого через пролом длины L в заборе.

Решение



Условие видимости: соединяющий пешеходов отрезок прямой проходит через пролом (1балл). Границы видимости – прямые проходят через края пролома (2 балла). Граничные отрезки и перемещения пешеходов Vt и Ut (1 балл) образуют два подобных треугольника (1 балл). Третий подобный треугольник опирается на отрезок L (1 балл). Если общая треугольникам вершина находится на расстоянии y от забора, а h расстояния от пешеходов до забора, то из подобия $Ut/(h - y) = L/y$ и $Vt/(h + y) = L/y$ (2 балла). Откуда, исключая h и y , имеем $(V - U)t = 2L$ (1 балла) и окончательно $t = 2L/(V - U)$ (1 балл).

Разбалловка

Этапы решения	Соотношения	Баллы
Условие видимости		1
Границы видимости		2
Нахождение перемещений	Vt и Ut	1
Указание трёх подобных треугольников		1+1
Равенство отношений оснований и высот треугольников	$Ut/(h - y) = L/y; Vt/(h + y) = L/y$ Или аналог	2
Исключение h и y	$(V - U)t = 2L$	1
Нахождение искомого времени	$t = 2L/(V - U)$	1

2. Самолёт с места старта летит с постоянной по величине и направлению скоростью. На высоте h от него оторвалась бомба, которая в момент своего наибольшего подъёма достигла высоты H . На какой высоте в этот момент находился самолет? Влиянием воздуха на движение бомбы пренебречь.

Решение

Достаточно рассмотреть только движение по вертикали: самолёт поднимается с постоянной скоростью v , а бомба имеет начальную скорость v и ускорение g , направленное вниз (2 балла). Пусть t время от момента отрыва до подъёма на максимальную высоту. Так как скорость бомбы в верхней

точке обращается в ноль, то $v - gt = 0$ (2 балла). Перемещение бомбы за это время

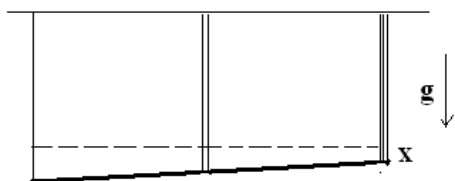
$H - h = vt - gt^2/2$ (2 балла). Пусть искомая высота самолёта y , тогда перемещение самолёта $y - h = vt$ (2 балла). Исключив v и t , имеем окончательно $y = 2H - h$ (2 балла). (Возможно решение, когда начинают с высшей точки и возвращаются в прошлое, суть уравнений остаётся прежней, но сами они чуть проще. Возможно решение, использующее переход в систему отсчёта самолёта.)

Разбалловка

Этапы решения	Соотношения	Баллы
Анализ движения по вертикали		2
Обращение скорости бомбы в 0 в верхней точке	$v - gt = 0$	2
Выражения для перемещений а) бомбы	$H - h = vt - gt^2/2$ (аналог)	1+1
б) самолёта	$y - h = vt$	1+1
Исключение v и t , ответ для высоты y	$y = 2H - h$	1 + 1

3. Однородный стержень веса P висит на 6 совершенно одинаковых упругих резинках, привязанных верхними концами к горизонтальному потолку. Одна резинка соединена с левым концом стержня, две – с серединой, три с правым концом стержня. Все резинки вертикальны. Найдите натяжения всех резинок.

Решение



Резинки растянутся по разному и стержень наклонён, на рис. указано удлинение x резинок на правом конце. Пусть натяжение одной из трёх T_3 , $T_3 = kx$, где k жёсткость резинки (1балл). В равновесии стержень не поворачивается, тогда из моментов сил относительно середины стержня имеем $T_1 = 3T_3$ (2 балла). Здесь T_1 натяжение одиночной резинки с левого конца – плечи сил на концах равны, а справа действует сила $3T_3$. Тогда удлинение одиночной резинки $y = 3x$ (1балл). Удлинение резинок, соединённых с серединой $z = 2x$ (1балл) – это средняя линия трапеции с основаниями x и $3x$. Соответственно натяжение каждой из этих двух резинок $T_2 = 2kx = 2T_3$ (1 балла). Из равновесия сил по вертикали имеем $T_1 + 2T_2 + 3T_3 = P$ (1балл) и окончательно $T_1 = 0,3P$; $T_2 = 0,2P$; $T_3 = 0,1P$. (3 балла).

Разбалловка

Этапы решения	Соотношения	Баллы
Связь натяжения и растяжения справа	$T_3 = kx$	1
Равновесие моментов сил от-но середины	$T_1 = 3T_3$	1+1
Удлинение одиночной резинки	$y = 3x$	1
Удлинение средних резинок	$z = 2x$	1
Натяжения средних резинок	$T_2 = 2kx = 2T_3$	1
Равновесие сил по вертикали	$T_1 + 2T_2 + 3T_3 = P$	1
Нахождение всех натяжений	$T_1 = 0,3P$; $T_2 = 0,2P$; $T_3 = 0,1P$.	1+1+1



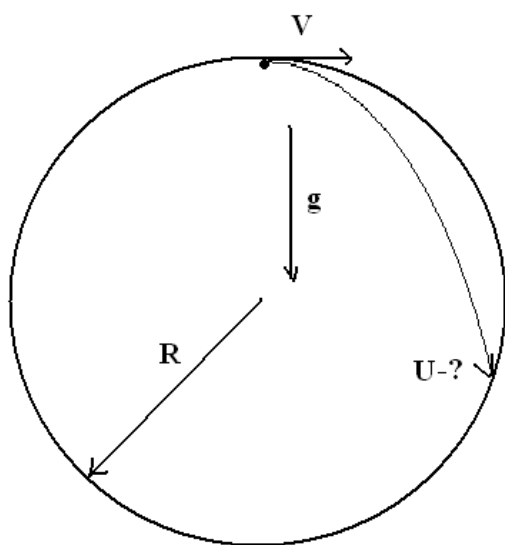
H

Решение

При уменьшении плотности воды справа уровень повышается и избыточное давление на уровне верхнего отверстия трубки $\Delta P = \rho g x$ (2 балла). За счёт перетекания воды влево поднимается уровень воды слева. Если он поднялся на y , то избыточное давление на уровне верхнего отверстия трубки, рассчитанное по холодной воде в цилиндре и трубке, $\Delta P = \rho_0 g y + \rho_0 g H - \rho_0 g H = \rho_0 g y$ (1+2 = 3 балла). Отсюда $\rho x = \rho_0 y$ (1 балл). Из неизменности суммарной массы воды $\rho_0(y + H) + \rho(x + H) = 2\rho_0 H$ (2 балла). Из последних двух соотношений находим $x = H(\rho_0 - \rho)/2\rho$.

Разбалловка

Этапы решения	Соотношения	Баллы
Избыточное давление справа от отверстия	$\Delta P = \rho g x$	2
Указание, что оно такое же слева		1
Расчёт его «по холодной воде»	$\Delta P = \rho_0 g y + \rho_0 g H - \rho_0 g H = \rho_0 g y$	2
Вывод связи y и x	$\rho x = \rho_0 y$	1
Выражение неизменности массы	$\rho_0(y + H) + \rho(x + H) = 2\rho_0 H$	2
Нахождение x	$x = H(\rho_0 - \rho)/2\rho$	2



5. В сфере радиуса $R = 3\text{ м}$ в верхней точке находится небольшое тело. Ему сообщают горизонтальную скорость $V = 5\text{ м/с}$. Какова скорость тела перед ударом о стенку сферы? Ускорение свободного падения $g \cong 10\text{ м/с}^2$.

Решение

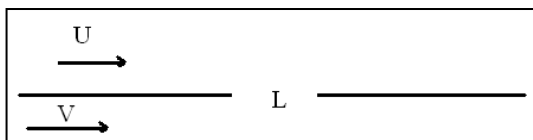
За время полёта до удара t , тело приобретёт вертикальную скорость gt (1 балл). Горизонтальная проекция не изменится, и для скорости U перед ударом имеем $U^2 = V^2 + (gt)^2$ (2 балла). Расстояние по горизонтали от центра сферы до места удара Vt (1 балл). Расстояние по вертикали от центра сферы до места удара $|R - gt^2/2|$ (1 балл). Тогда $R^2 - (Vt)^2 = (R - gt^2/2)^2$ (1 балл). Откуда $U^2 = 4Rg - 3V^2 = 45 \text{ (м/с)}^2$, $U \cong 6,7 \text{ м/с}$ (решение, общий ответ, число 4 балла).

Разбалловка

Этапы решения	Соотношения	Баллы
Нахождение вертикальной скорости	$U_y = gt$	1
Нахождение квадрата скорости по t	$U^2 = V^2 + (gt)^2$	2
Расстояния до центра а) по горизонтали	$x = Vt$	1
б) вертикали	$y = R - gt^2/2 $	1
Уравнение для t^2 из $R^2 = x^2 + y^2$	$R^2 - (Vt)^2 = (R - gt^2/2)^2$	1
Нахождение t^2 , U^2 и U	$t^2 = 4(R/g + V^2/g^2)$; $U^2 = 4Rg - 3V^2$ $= 45 \text{ (м/с)}^2$, $U \cong 6,7 \text{ м/с}$	4

I этап (очный) Всесибирской олимпиады по физике
Задачи 9 класс. (27 октября 2013 г.)

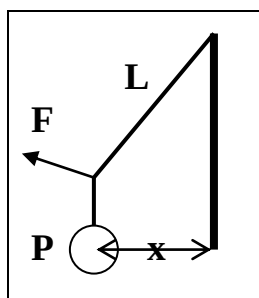
1. В бочку со 100 литрами воды всыпали 9 кг соли. После чего объём заполненной части бочки сразу стал 102 литра. К моменту полного растворения соли этот объём увеличился ещё на 1 литр. Найдите плотность соли и плотность получившегося раствора, если масса литра чистой воды 1 кг.



2. Вдоль забора на равных расстояниях от него идут вправо два пешехода со скоростями V и U . Найдите наибольшее время, в течение которого один пешеход может видеть другого через пролом длины L в заборе.

3. Кисть в сечении имеет форму прямоугольника со сторонами 5 и 12 см. Маляр держит её вертикально и ведёт по полу со скоростью $V = 0,1$ м/с. Какую наибольшую площадь S он может окрасить за время $t = 2$ с?

4. В длинном отводном канале водохранилища при отсутствии сброса воды нет течения, а во время сброса устанавливается течение с постоянной скоростью. При поездке вдоль всего канала туда и назад во время сброса воды катер при том же режиме работы мотора тратит горючего на треть больше, чем в стоячей воде. Во сколько раз скорость катера в стоячей воде больше скорости течения воды в канале во время её сброса?



5. Шар весом $P = 500$ Н привязан лёгким шнуром к вертикальной стене. На расстоянии $L = 10$ м от точки подвеса к шнуру привязана бечёвка, которая рвётся при приложении силы $F = 200$ Н. На каком наибольшем расстоянии x от стены можно удерживать центр шара бечёвкой? Как бечёвка должна быть направлена?

Задача не считается решенной, если приводится только ответ!
Желаем успеха!

Возможные решения и разбалловка 9 класс

Все задачи оцениваются из 10 баллов. При ином **правильном** и **полном** решении суммарная оценка 10 баллов. При наличии недочётов ориентируйтесь на предложенную поэтапную разбалловку.

1. В бочку со 100 литрами воды всыпали 9 кг соли. После чего объём заполненной части бочки сразу стал 102 литра. К моменту полного растворения соли этот объём увеличился ещё на 1 литр. Найдите плотность соли и плотность получившегося раствора, если масса литра чистой воды 1 кг.

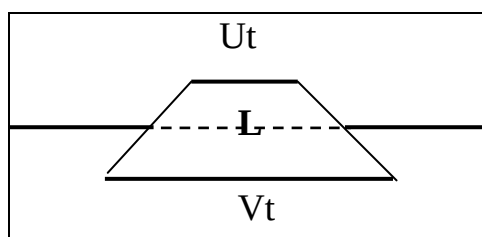
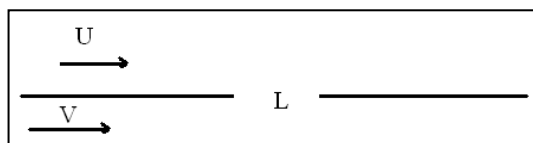
Решение

Соль не успела раствориться и объём увеличился за счёт собственного объёма соли. (Идея 2 балла) $V_{\text{соли}} = V_1 - V_0 = 2$ л (1 балл). $\rho_{\text{соли}} = m/V_{\text{соли}} = 4,5$ кг/л (1 + 1 = 2 балла).

Объём раствора $V_{\text{рас}} = V_1 + \Delta V = 103$ л (1 балл). $m_{\text{рас}} = m + m_{\text{воды}} = 109$ кг (1 + 1 = 2 балла). $\rho_{\text{рас}} = m_{\text{рас}}/V_{\text{рас}} \cong 106$ кг/л (1 + 1 = 2 балла).

Разбалловка

Этапы решения	Соотношения	Баллы
Идея, что начальный прирост объёма равен объёму соли		2
Нахождение объёма соли (идея+число)	$V_{\text{соли}} = V_1 - V_0 = 2$ л	1
Нахождение плотности соли	$\rho_{\text{соли}} = m/V_{\text{соли}} = 4,5$ кг/л	2
Нахождение объёма раствора	$V_{\text{рас}} = V_1 + \Delta V = 103$ л	1
Нахождение массы воды и раствора	$m_{\text{рас}} = m + m_{\text{воды}} = 109$ кг	2
Нахождение плотности раствора	$\rho_{\text{рас}} = m_{\text{рас}}/V_{\text{рас}} \cong 106$ кг/л	2



2. Вдоль забора на равных расстояниях от него идут вправо два пешехода со скоростями V и U . Найдите наибольшее время, в течение которого один пешеход может видеть другого через пролом длины L в заборе.

Решение

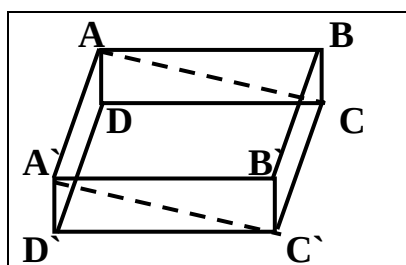
Условие видимости – отрезок прямой, соединяющий пешеходов в данный момент, проходит через пролом. Границы видимости – этот отрезок проходит через края пролома. Перемещения за искомое время Ut и Vt образуют тогда параллельные стороны трапеции, а границы её наклонные стороны. L средняя линия трапеции, так как расстояния до стены равны. Поскольку длина средней линии равна полусумме оснований, то $2L = (U + V)t$ и $t = 2L/(U + V)$.

Разбалловка

Этапы решения	Соотношения	Баллы
Условие видимости		1
Нахождение границ видимости		1
Нахождение перемещений	U_t и V_t	1
Указание трапеции (или аналог)		2
Вывод, что L средняя линия (аналог)		2
Связь L с перемещениями	$2L = (U + V)t$ (аналог)	2
Нахождение искомого времени	$t = 2L/(U + V)$	1

3. Кисть в сечении имеет форму прямоугольника со сторонами 5 и 12 см. Маляр держит её вертикально и ведёт по полу со скоростью $V = 0,1$ м/с. Какую наибольшую площадь S он может окрасить за время $t = 2$ с?

Решение



Рассмотрим некоторое произвольное направление скорости. Пусть исходное положение кисти – прямоугольник $ABCD$, а конечное $A'B'C'D'$. При этом перемещения всех вершин AA' , BB' и так далее одинаковы, направлены по скорости и равны Vt . Граница окрашенной области – шестиугольник с вершинами $ABCC'D'A'$. Её площадь складывается из площади исходного прямоугольника и площадей двух параллелограммов $ADD'A'$ и $DCC'D'$. Возможны другие варианты «раскроя». Если провести в исходном прямоугольнике диагональ AC (штриховая линия на рис.), то окрашенная область складывается из параллелограмма $ACC'A'$ и двух треугольников ABC и $A'C'D'$. Сумма площадей этих треугольников как раз равна площади исходного прямоугольника. Тогда наибольшая площадь окраски будет при наибольшей площади параллелограмма $ACC'A'$. Наибольшей площадью параллелограмм с заданными сторонами обладает, когда угол между смежными сторонами прямой, то есть когда он является прямоугольником. Итак, скорость должна быть перпендикулярна диагонали AC . Тогда суммарная площадь $S_{\max} = |AC|Vt + |AB||BC|$. Длина диагонали рассчитывается по теореме Пифагора: $|AC| = 13$ см, по условию известно $|AB| = 12$ см и $|BC| = 5$ см. Поэтому $S_{\max} = 13 \times 10 \times 2 + 12 \times 5 = 320$ см².

Разбалловка

Этапы решения	Соотношения	Баллы
Построение области окраски при произвольном направлении скорости	Равенство перемещений всех вершин величине Vt	1 + 1
Разрезание шестиугольника на «простые» части	Наличие какого-то варианта	1
Нахождение варианта с диагональю	Параллелограмм и два тр-ка	2
Условие максимума площади, перпендикулярность скорости и		2

диагонали		
Нахождение длины диагонали	$ AC = 13 \text{ см}$	1
Нахождение суммарной площади	$S_{\max} = 13 \times 10 \times 2 + 12 \times 5 = 320 \text{ см}^2$	2

Примечание. $S = ab + Vt\sqrt{a^2 + b^2} = 320 \text{ см}^2$ можно получить другими путями, скажем, рассматривая заметаемые сторонами прямоугольника площади. Тогда этапы и разбиения на этапы могут быть другими. При некоторых подходах в «раскрое» может быть что-то опущено или неучтено перекрытие. Тогда, если указано только слагаемое ab , а остальное неверно, суммарная оценка 1 балл. Если правильно получено слагаемое $Vt\sqrt{a^2 + b^2} = 260 \text{ см}^2$ и упущено первое слагаемое, суммарная оценка 6 баллов.

4. В длинном отводном канале водохранилища при отсутствии сброса воды нет течения, а во время сброса устанавливается течение с постоянной скоростью. При поездке вдоль всего канала туда и назад во время сброса воды катер при том же режиме работы мотора тратит горючего на треть больше, чем в стоячей воде. Во сколько раз скорость катера в стоячей воде больше скорости течения воды в канале во время её сброса?

Решение

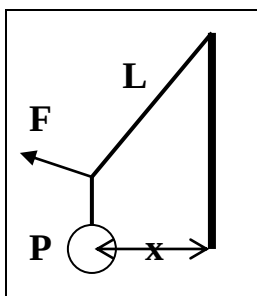
При одинаковом режиме работы мотора одинакова скорость катера v относительно воды (1 балл), а расход горючего пропорционален времени пути (1 балл). При длине канала L время пути в стоячей воде $t = 2L/v$ (1 балл). А время пути туда и назад при наличии течения $t + \Delta t$, где $\Delta t/t = 1/3$ (1 балл). Выразим это время через скорость течения $t + \Delta t = L/(v - u) + L/(v + u)$ (2 балла). Отсюда получается условие для скоростей

$$(t + \Delta t)/t = 4/3 = (1/2)(v/(v - u) + v/(v + u)) = v^2/(v^2 - u^2) \quad (2 + 1 = 3 \text{ балла}).$$

А после упрощений $v^2 = 4u^2$ и окончательно $v/u = 2$ ($1+1 = 2$ балла).

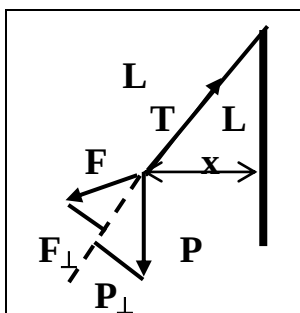
Разбалловка

Этапы решения	Соотношения	Баллы
Вывод о равенстве скорости относительно воды		1
Выражение времени в стоячей воде	$t = 2L/v$	1
Время пути при сбросе	$t + \Delta t = (4/3)t$ (аналог)	1
Выражение времени через скорость течения	$t + \Delta t = L/(v - u) + L/(v + u)$	2
Вывод условия для скоростей		3
Нахождение отношения скоростей	$v^2 = 4u^2$; $v/u = 2$	1 + 1



5. Шар весом $P = 500 \text{ Н}$ привязан лёгким шнуром к вертикальной стене. На расстоянии $L = 10 \text{ м}$ от точки подвеса к шнуру привязана бечёвка, которая рвётся при приложении силы $F = 200 \text{ Н}$. На каком наибольшем расстоянии x от стены можно удерживать центр шара бечёвкой? Как бечёвка должна быть направлена?

Решение



Натяжение нижней вертикальной части шнура равно P , обозначим натяжение верхней наклонной части T , а натяжение бечёвки F . Это вектора сил, которые приложены к точке соединения шнура и бечёвки. (2 балла). Условие равновесия: векторная сумма этих сил нуль. Тогда должны быть уравновешены и силы вдоль отклонённого шнура и поперёк него. Продольные составляющие сил F и P уравниваются натяжением T

наклонной части. А проекции F и P на перпендикулярное наклонной части направление уравнивают друг друга: $F_{\perp} = P_{\perp}$. (2 балла). Прямоугольный треугольник с катетом $P_{\perp}$ и гипотенузой P подобен треугольнику с катетом x и гипотенузой L , $x/L = P_{\perp}/P$, тогда $x/L = F_{\perp}/P$ (2 балла).

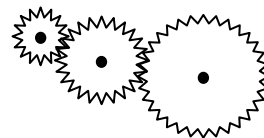
Максимум x отвечает максимуму $F_{\perp}$, а он достигается, когда F и бечёвка перпендикулярны наклонной части шнура и $F_{\perp} = F$, тогда $x_{\max} = LF/P = 4$ м.

Разбалловка

Этапы решения	Соотношения	Баллы
Анализ сил, приложенных к «узлу»		1
Условие равновесия (общая идея)		1
Равновесие продольных и поперечных сил	$F_{\perp} = P_{\perp}$.	2
Подобие тр-ка сил и тр-ка L x	$x/L = P_{\perp}/P$, тогда $x/L = F_{\perp}/P$	2
Условие максимума x – макс. $F_{\perp}$		1
Указание направления		1
Нахождение $x_{\max}$	$x_{\max} = LF/P = 4$ м	2

1) Три разных шестеренки (зубчатые колеса) зацеплены зубьями между собой, как показано на рисунке, и могут поворачиваться вокруг закрепленных осей. Количество зубьев у шестеренок равно 15, 20 и 30 шт., соответственно. Сколько оборотов в день делает правая шестерня, если известно, что левая делает 70 оборотов в неделю?

Решение задачи должно содержать достаточно подробное объяснение полученного ответа!



Решение: При повороте первой шестерни на один оборот через место контакта со второй шестерней пройдут все 15 зубьев (+1). Так как зубья каждой из шестеренок всегда должны попадать в пространство между зубьями ответной шестерни (+1 балла), то в контакте с первой шестерней побывают также 15 зубьев второй шестерни (т.е. она повернется на $\frac{3}{4}$ оборота) (+2 за это или аналогичное рассуждение). По той же причине, по 15 зубьев второй и третьей шестерен пройдет через место их контакта (+2). Поэтому третья шестерня повернется на пол-оборота (+2), а частота обращения составит 35 оборот/неделя или 5 оборот/день (+2).

Если без пояснений делается утверждение, что отношение числа оборотов равно отношению числа зубьев (или аналогичное), то при формально правильном ответе ставится 6 баллов.

2) Саша всё время ела сушки, которые очень любила. Каждый раз, когда она шла по шоссе от своего дома до дома бабушки, она съедала 60 сушек. Однажды, когда Саша прошла две трети всей дороги, она села в автобус, на котором проехала остаток пути. Во сколько раз автобус едет быстрее, чем идет Саша, если в этот раз за всю дорогу Саша съела только 42 сушки? Считать, что все сушки одинаковые, а Саша ходит с постоянной скоростью.

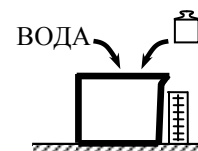
Решение: Так как все сушки одинаковые, и Саша их все время ела, то количество съеденных сушек пропорционально прошедшему времени (+2 балла). Когда Саша прошла $\frac{2}{3}$ пути, то она съела 40 сушек (+2). За оставшуюся дорогу она съела всего 2 сушки вместо обычных 20, т.е. времени на преодоление оставшегося пути прошло в $20/2=10$ раз меньше (+3). Отсюда следует, что скорость автобуса в 10 раз больше, чем скорость Саши (+3).

3) В ресторан закупили много одинаковых комплектов столовых приборов. Каждый комплект состоит из ножа, вилки и ложки. Все столовые приборы свалили в ящик и поручили официанту-стажеру их взвесить. Он брал, не глядя, каждый раз по три предмета, взвешивал их на весах и записывал вес. При взвешивании оказалось, что весы всегда показывали какое-то одно из следующих значений: 300 г, 330 г, 360 г, или 390 г, а вся масса приборов в сумме составила 9.9 кг. Сколько в ящике было ножей, если известно, что они весят больше, чем ложки, а ложки весят столько же, сколько и вилки?

Решение: Показания весов различаются потому, что среди взятых официантом предметов бывает разное количество ножей (+1 балла). Самый малый вес – когда ножей нет (+1), самый большой – когда все попавшиеся предметы были более тяжелыми ножами (+1). Это можно обосновать тем, что встречается 4 различных значений масс 3-х предметов, т.е. встречаются все возможные варианты (за наличие обоснования +1 балл).

Значит, масса ложки или вилки составляет 100 г (+1), а масса ножа – на 30 г больше, т.е. 130 г (+1). Так как полная масса одного комплекта приборов была 330 г (+2), то всего комплектов, как и ножей, было $9900/330=30$ шт (+2). Если сразу указано, что масса одного комплекта составляет 330 г, ставится полный балл.

4) В пустой стакан налили 200 мл воды, а затем положили в него стальную гирьку. Уже при частичном погружении гирьки вода стала выливаться из стакана, и всего вылилось 40 мл воды. Во второй раз в такой же стакан налили вдвое меньше воды, но положили стальную гирьку, вдвое большую по массе, чем в первый раз. Воды во второй раз вылилось 20 мл. Чему равен объем всего стакана? Считать, что гирьки в стакан входят целиком, и пустот внутри гирь нет.



Решение: Обозначим искомый объем стакана как V_C , объем гирьки как V_G , а объем воды, заливаемый в первый раз, V_B . После того, как вся лишняя вода вылилась, в стакане находится только гирька и оставшаяся вода (+1 балл). Это условие выражается уравнением

$$V_C = (V_B - 40) + V_G \quad (\text{за это или аналогичное уравнение } +3 \text{ балла}).$$

Во второй раз объем заливаемой воды равен $V_B/2$. Так как при удвоенной массе и той же плотности материала объем должен удваиваться, то объем вдвое тяжелой гирьки равен $2 \cdot V_G$ (за обоснование +1 балл). Тогда, для второго случая, условие на объемы тел записывается так:

$$V_C = (V_B/2 - 20) + 2 \cdot V_G \quad (\text{за уравнение } +3 \text{ балла}).$$

Решая систему уравнений (проще всего умножить первое ур-е на 2 и вычесть второе ур-е), получаем, что $V_C = 240$ мл (+2 балла).

1) Саша всё время ела сушки, которые очень любила. Каждый раз, когда она шла по шоссе от своего дома до дома бабушки, она съедала 50 сушек. Однажды ее подвез на машине бабушкин сосед, и в этот раз за всю дорогу Саша съела только 41 сушку. Какую часть всей дороги Саша проехала на машине, если машина едет в 10 раз быстрее, чем идет Саша? Считать, что все сушки одинаковые, а Саша ходит с постоянной скоростью.

Решение: Так как все сушки одинаковые, и Саша их все время ела, то количество съеденных сушек пропорционально прошедшему времени (+1 балл). Если долю всего пути, которую Саша ехала на машине, обозначить за X , то часть пути, которую Саша прошла пешком, составит $1-X$ (+1). Пока Саша шла пешком, она съела $50 \cdot (1-X)$ сушек (+2). На другую часть пути она потратила в 10 раз меньше времени, чем обычно, так как ехала на машине, т.е. она успела съесть $50 \cdot X/10$ сушек (+2). По условию задачи $50 \cdot (1-X) + 5 \cdot X = 41$ (+2), т.е. $45 \cdot X = 9$, или $X = 1/5$ часть (+2). В процентах искомая доля пути составит 20%.

2) По одной и той же дороге едут две машины, первая – со скоростью 60 км/ч, а вторая машина – со скоростью 72 км/час. В некоторый момент времени вторая машина отставала от первой на 1 км. Какое расстояние после этого должна проехать вторая машина, чтобы опередить другую машину на 1 км? Скорости машин считать постоянными.

Решение: За время T такого обгона вторая машина проедет на $L=2$ км больше той, которая вначале была первой (+1). Тогда

$T \cdot V_2 - T \cdot V_1 = L$ (+2 балла), откуда следует, что $T = L/(V_2 - V_1)$ (+2). Если сразу находится время обгона (с явным указанием на использование относительной скорости $V_2 - V_1$), то ставится 5 баллов.

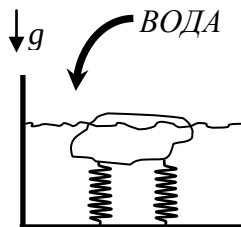
Искомое расстояние равно $T \cdot V_2$ (+1 балл). Далее находим $T \cdot V_2 = L V_2 / (V_2 - V_1)$ (+2), что составляет 12 км (+2).

3) В ресторан закупили много одинаковых комплектов столовых приборов. Каждый комплект состоит из ножа, вилки и ложки. Все столовые приборы свалили в ящик и поручили официанту-стажеру их взвесить. Он брал, не глядя, каждый раз по четыре предмета, взвешивал их на весах и записывал вес. При взвешивании оказалось, что весы всегда показывали какое-то одно из следующих значений: 400 г, 430 г, 460 г, 490 г, или 520 г, а вся масса приборов в сумме составила 9.9 кг. Сколько в ящике было ножей, если известно, что они весят больше, чем ложки, а ложки весят столько же, сколько и вилки?

Решение: Показания весов различаются потому, что среди взятых официантом предметов бывает разное количество ножей (+1 балла). Самый малый вес – когда ножей нет (+1), самый большой – когда все попавшиеся предметы были более тяжелыми ножами (+1). Это можно обосновать тем, что встречается 5 разных значений масс 4-х предметов, т.е. встречаются все возможные варианты (за наличие обоснования +1 балл).

Значит, масса ложки или вилки составляет 100 г (+1), а масса ножа – на 30 г больше, т.е. 130 г (+1). Так как полная масса одного комплекта приборов была 330 г (+2), то всего комплектов, как и ножей, было $9900/330=30$ шт (+2).

4) Тело внутри сосуда удерживается в равновесии пружинами, величина деформации которых составляет 2 см. В сосуд начинают наливать воду, и наливают ее до тех пор, пока длина пружин не перестает меняться. Чему равна плотность материала этого тела, если величина деформации пружин в конечном итоге составила 3 см?



Решение: Из условия ясно, что до наливания воды пружины были сжаты на 2 см из-за наличия силы тяжести (+1). После того, как тело стало погружаться в воду, на него стала действовать выталкивающая сила, направленная вверх, т.е. в начале заливания воды деформация пружин уменьшается. Величина деформации пружин может стать больше 2 см только в том случае, когда пружины на 3 см растянутся (+2). После полного погружения тела в воду растяжение пружин перестанет увеличиваться, так как величина выталкивающей силы больше не будет нарастать (+1).

Таким образом, сила тяжести $Mg = \rho_T g V$ (ρ_T – плотность тела, V – его объем) деформирует пружины на 2 см, а появление выталкивающей силы $F_a = \rho_B g V$ ($\rho_B = 1 \text{ кг/дм}^3$ – плотность воды) дополнительно деформирует пружину на 5 см (+1). Величина силы упругости пропорциональна величине деформации пружины (+1), поэтому

$$\text{Поэтому, } \frac{Mg}{F_a} = \frac{\rho_T}{\rho_B} = \frac{2}{5} \text{ (+2), а } \rho_T = 400 \text{ кг/м}^3 \text{ (+2).}$$

5) Имеется два чайника, в каждый из которых налито по два литра воды. Половину воды из одного чайника разливают по двум литровым банкам (не поровну). Потом берут второй чайник и доливают из него воду в обе банки до их заполнения, а остаток выливают в первый чайник. После этих переливаний температура воды в первом чайнике составила 40 °С, а в одной из банок 50 °С. Чему равна температура воды в другой банке? Зависимостью плотности воды от температуры, теплоемкостью посуды и теплообменом с окружающей средой пренебречь. Считать, что в банку входит не больше литра воды.

Решение: Из данных условия следует, что в конечном итоге в чайнике было 2 л воды, причем в нем было смешано по 1 л воды из каждого чайника (+1 балл). В обеих банках также было всего 2 литра воды, причем по одному литру воды из каждого чайника (+2), перемешанных в неизвестной пропорции. Следовательно, если бы мы смешали воду из банок, то получили бы такую же смесь, как и в чайнике с водой (+3), т.е. с температурой 40 °С. Так как масса воды в обеих банках считается одинаковой, то при смешивании конечная температура будет равна среднему арифметическому начальных температур (+2): $mCT_1 + mCT_2 = 2mC \cdot T_{CM}$, т.е. $T_{CM} = (T_1 + T_2)/2$

Если в одной банке температура была 50 °С, то в другой она должна составлять 30 °С (+2).

Если вместо полного решения есть только указание на то, что описанная в условии ситуация может иметь место только в том случае, если вода в чайниках исходно имела разную температуру, то ставится 1 балл, если вдобавок указано, что в одном чайнике температура воды должна быть выше 50 °С, а в другом – ниже 30 °С, то ставится всего 2 балла.