

Всесибирская олимпиада школьников 2012-2013 г.г. по математике

Заключительный этап

7 класс

Время написания заданий 4 астрономических часа Каждая задача оценивается в 7 баллов

- 7.1. Разрежьте квадрат 5×5 на прямоугольники 1×3 и 1×4 .
- 7.2. Для того чтобы купить квартиру, нужно взять или ровно 9 маленьких, 6 средних и один большой кредиты, или ровно 3 маленьких, 2 средних и 3 больших кредита. Какое количество только больших кредитов потребуется, чтобы купить квартиру?
- 7.3. Среди 9 монет есть 4 фальшивых. Все настоящие монеты весят одинаково, фальшивые же отличаются по весу друг от друга и от настоящих. Используя только чашечные весы без гирь, найдите хотя бы одну настоящую монету за четыре взвешивания.
- 7.4. Диагонали AC и BD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O . Известно, что периметр треугольника ABC равен периметру треугольника ABD . Кроме того, периметр ACD равен периметру треугольника BCD . Докажите, что $AO = OB$.
- 7.5. В клетках квадрата 7×7 расставлены плюсы и минусы. Разрешается менять все знаки на противоположные в любой строке или любом столбце. Докажите, что такими действиями можно добиться того, чтобы в каждой строке и в каждом столбце плюсов было больше, чем минусов.

Всесибирская олимпиада школьников 2012-2013 г.г. по математике

Заключительный этап

8 класс

Время написания заданий 4 астрономических часа Каждая задача оценивается в 7 баллов

- 8.1. Роман хочет купить футбольный клуб, яхту и небольшой особняк. Есть купить только футбольный клуб, то останется 2 миллиарда, если только яхту, то — 3 миллиарда, а если только особняк, то — 6 миллиардов. Сможет ли Роман купить клуб, яхту и особняк одновременно? Ответ обоснуйте.
- 8.2. Сергей расставил по кругу несколько (больше двух) попарно различных вещественных чисел так, что каждое число оказалось равно произведению своих соседей. Сколько чисел мог расставить Сергей?
- 8.3. Имеется двадцать одинаковых на вид монет, одна из них весит 9,9 г, две другие — по 9,8 г, а все оставшиеся — по 10 г. Можно ли за два взвешивания на чашечных весах без гирь выявить хотя бы одну десятиграммовую монету?
- 8.4. Даны треугольник ABC и такие точки D и E , что углы ADB и CEB прямые. Докажите, что длина отрезка DE не больше полупериметра треугольника ABC .
- 8.5. Миссис Хадсон и Доктор Ватсон загадали по натуральному числу. Каждый из них посчитал сумму всех делителей своего числа (включая 1 и само число) и сумму чисел, обратных к делителям. Когда Шерлок Холмс узнал, что и первые, и вторые суммы его друзей совпали, он сразу догадался, что миссис Хадсон и доктор Ватсон загадали одно и то же число. Докажите, что Шерлок Холмс прав.

Всесибирская олимпиада школьников 2012-2013 г.г. по математике

Заключительный этап

9 класс

Время написания заданий 4 астрономических часа

Каждая задача оценивается в 7 баллов

9.1. Какие две цифры нужно дописать справа к числу 2013, чтобы полученное шестизначное число делилось на 101? Найти все возможные варианты ответа.

9.2. Найти максимальное натуральное нечётное число, которое нельзя представить в виде суммы трёх различных натуральных составных чисел.

9.3. В остроугольном треугольнике ABC выбрана точка H такая, что радиусы описанных окружностей треугольников AHB , BHC и CHA равны. Доказать, что H является точкой пересечения высот треугольника ABC .

9.4. Доказать, что, если $x^2 + xy + xz < 0$, то $y^2 > 4xz$.

9.5. В клетках доски 8 на 8 расставлены фишки так, что для каждой фишки горизонталь либо вертикаль доски, в которых она лежит, содержит всего не более трёх фишек. Каково максимально возможное количество фишек на доске?

Всесибирская олимпиада школьников 2012-2013 г.г. по математике

Заключительный этап

10 класс

Время написания заданий 4 астрономических часа

Каждая задача оценивается в 7 баллов

10.1. Какие две цифры нужно дописать справа к числу 2013, чтобы полученное шестизначное число делилось на 101? Найти все возможные варианты ответа.

10.2. Решить уравнение: $\sqrt[3]{20-x} - \sqrt[3]{13-x} = \sqrt[3]{7}$.

10.3. Окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в двух точках A и B . Пусть P и Q - точки пересечения окружности, описанной вокруг треугольника O_1AO_2 с первой и второй окружностями соответственно. Доказать, что отрезки O_1Q и O_2P пересекаются в точке B .

10.4. В клетках доски 8 на 8 расставлены фишки так, что для каждой фишки горизонталь или вертикаль доски, в которых она лежит, содержит всего одну фишку. Каково максимально возможное количество фишек на доске?

10.5. В остроугольном треугольнике ABC точки A_1, B_1, C_1 являются основаниями высот, опущенных из вершин A, B, C соответственно, а H — точка пересечения высот. Точка M — середина AH , Q — точка пересечения отрезков BH и A_1C_1 , а P - точка пересечения прямой B_1M и стороны AB .

Доказать, что прямая PQ перпендикулярна стороне BC .

Всесибирская олимпиада школьников 2012-2013 г.г. по математике

Заключительный этап

11 класс

Время написания заданий 4 астрономических часа

Каждая задача оценивается в 7 баллов

11.1. Какие три цифры нужно дописать справа к числу 579, чтобы полученное шестизначное число делилось на 5, на 7 и на 9? Найти все возможные варианты ответа.

11.2. Найдите все тройки действительных чисел таких, что каждое из этих чисел равно квадрату разности двух других.

11.3. Периметр треугольника ABC равен 24 см, а отрезок, соединяющий точку пересечения его медиан с точкой пересечения его биссектрис, параллелен стороне AC . Найти длину AC .

11.4. На сфере отмечена точка M . Рассмотрим все тройки точек A, B, C на сфере, отличных от M , таких, что отрезки MA , MB , MC попарно перпендикулярны, и для каждой такой тройки рассмотрим плоскость, проходящую через A, B, C . Докажите, что все такие плоскости проходят через некоторую общую точку.

11.5. Доказать, что среди пяти произвольных различных вершин правильного (все стороны и все углы которого равны) 15-ти угольника всегда найдутся три, являющихся вершинами равнобедренного треугольника.