



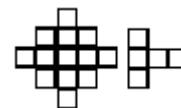
Заключительный этап

7 класс

Время выполнения 4 астрономических часа

Каждая задача оценивается в 7 баллов.

7.1. Расставьте в клетках большой фигуры единицы и двойки так, чтобы сумма чисел в любой маленькой фигуре была бы равна 6. Маленькая фигура может быть произвольно повернута.



7.2. В 2014 году Ване исполнилось столько лет, какова сумма цифр года его рождения плюс три. В каком году родился Ваня?

7.3. Мальчик и девочка шли навстречу друг другу. Когда мальчик прошёл половину пути, то до встречи оставался час. Когда девочка прошла половину пути, то после встречи прошло два часа. Сколько занял весь путь у мальчика?

7.4. Пусть p и q - последовательные различные простые числа, большие 2. Докажите, что $p+q$ является произведением трёх (возможно, не всех различных) натуральных чисел, больших 1.

7.5. Дан квадрат размера 5 на 5, разбитый вертикальными и горизонтальными линиями сетки на 25 единичных квадратов. Граница квадрата тоже считается линией. Прямоугольным контуром называется граница любого прямоугольника, составленного из единичных квадратов. Какое максимальное количество прямоугольных контуров можно провести в квадрате так, чтобы никакие два из них не содержали общего отрезка? Контур может иметь общие точки, некоторые из них могут содержать внутри себя частично или целиком другие контуры.



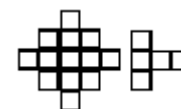
Заключительный этап

7 класс

Время выполнения 4 астрономических часа

Каждая задача оценивается в 7 баллов.

7.1. Расставьте в клетках большой фигуры единицы и двойки так, чтобы сумма чисел в любой маленькой фигуре была бы равна 6. Маленькая фигура может быть произвольно повернута.

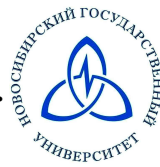


7.2. В 2014 году Ване исполнилось столько лет, какова сумма цифр года его рождения плюс три. В каком году родился Ваня?

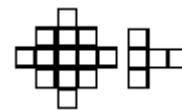
7.3. Мальчик и девочка шли навстречу друг другу. Когда мальчик прошёл половину пути, то до встречи оставался час. Когда девочка прошла половину пути, то после встречи прошло два часа. Сколько занял весь путь у мальчика?

7.4. Пусть p и q - последовательные различные простые числа, большие 2. Докажите, что $p+q$ является произведением трёх (возможно, не всех различных) натуральных чисел, больших 1.

7.5. Дан квадрат размера 5 на 5, разбитый вертикальными и горизонтальными линиями сетки на 25 единичных квадратов. Граница квадрата тоже считается линией. Прямоугольным контуром называется граница любого прямоугольника, составленного из единичных квадратов. Какое максимальное количество прямоугольных контуров можно провести в квадрате так, чтобы никакие два из них не содержали общего отрезка? Контур может иметь общие точки, некоторые из них могут содержать внутри себя частично или целиком другие контуры.



8.1. Расставьте в клетках большой фигуры единицы и двойки так, чтобы сумма чисел в любой маленькой фигуре была бы равна 6. Маленькая фигура может быть произвольно повернута.

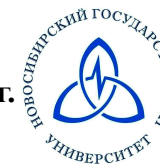


8.2. Кристина загадала трёхзначное число $A = \overline{abc}$, $a \geq b \geq c$. Оказалось, что из кубов его цифр так же можно составить трёхзначное число $B = \overline{xyz}$, $x = a^3$, $y = b^3$, $z = c^3$. Кристина сообщила Антону разность этих чисел, после чего Антон смог узнать число A . Найдите это число.

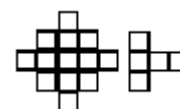
8.3. Мальчик и девочка шли навстречу друг другу. Когда мальчик прошёл половину пути, то до встречи оставался час. Когда девочка прошла половину пути, то после встречи прошло два часа. Сколько занял весь путь у мальчика?

8.4. Два равных отрезка AB и CD перпендикулярны, причем точка C лежит внутри отрезка AB . Точка X такова, что треугольники XAD и XBC – равнобедренные с вершиной в X . Докажите, что эти треугольники – прямоугольные.

8.5. В строку выписаны 11 целых чисел. Для любой группы подряд идущих чисел подсчитывается ее сумма (группы из одного числа тоже учитываются). Какое наибольшее количество сумм может оказаться нечетными?



8.1. Расставьте в клетках большой фигуры единицы и двойки так, чтобы сумма чисел в любой маленькой фигуре была бы равна 6. Маленькая фигура может быть произвольно повернута.



8.2. Кристина загадала трёхзначное число $A = \overline{abc}$, $a \geq b \geq c$. Оказалось, что из кубов его цифр так же можно составить трёхзначное число $B = \overline{xyz}$, $x = a^3$, $y = b^3$, $z = c^3$. Кристина сообщила Антону разность этих чисел, после чего Антон смог узнать число A . Найдите это число.

8.3. Мальчик и девочка шли навстречу друг другу. Когда мальчик прошёл половину пути, то до встречи оставался час. Когда девочка прошла половину пути, то после встречи прошло два часа. Сколько занял весь путь у мальчика?

8.4. Два равных отрезка AB и CD перпендикулярны, причем точка C лежит внутри отрезка AB . Точка X такова, что треугольники XAD и XBC – равнобедренные с вершиной в X . Докажите, что эти треугольники – прямоугольные.

8.5. В строку выписаны 11 целых чисел. Для любой группы подряд идущих чисел подсчитывается ее сумма (группы из одного числа тоже учитываются). Какое наибольшее количество сумм может оказаться нечетными?



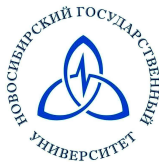
Всесибирская открытая олимпиада школьников по математике 2013-14 гг.

Заключительный этап

9 класс

Время выполнения 4 астрономических часа

Каждая задача оценивается в 7 баллов.



9.1. Найти все решения в целых числах уравнения: $2^x(4-x)=2x+4$.

9.2. Две прямые, проходящие через две различные вершины треугольника разбивают его на три треугольника и четырёхугольник. Могут ли площади всех треугольников совпадать?

9.3. Пусть p и q - последовательные различные простые числа, большие 2. Докажите, что $p+q$ является произведением трёх (возможно, не всех различных) натуральных чисел, больших 1.

9.4. По кругу выписаны 11 целых чисел. Для любой группы подряд идущих чисел подсчитывается ее сумма (группы из одного числа тоже учитываются). Какое наибольшее количество сумм может оказаться нечетными?

9.5. Длины всех сторон не обязательно выпуклого пятиугольника $ABCDE$ равны a , величина угла между какой-то парой диагоналей с общей вершиной равна 30° . Доказать, что длина некоторой диагонали пятиугольника тоже равна a .



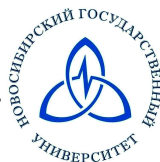
Всесибирская открытая олимпиада школьников по математике 2013-14 гг.

Заключительный этап

9 класс

Время выполнения 4 астрономических часа

Каждая задача оценивается в 7 баллов.



9.1. Найти все решения в целых числах уравнения: $2^x(4-x)=2x+4$.

9.2. Две прямые, проходящие через две различные вершины треугольника разбивают его на три треугольника и четырёхугольник. Могут ли площади всех треугольников совпадать?

9.3. Пусть p и q - последовательные различные простые числа, большие 2. Докажите, что $p+q$ является произведением трёх (возможно, не всех различных) натуральных чисел, больших 1.

9.4. По кругу выписаны 11 целых чисел. Для любой группы подряд идущих чисел подсчитывается ее сумма (группы из одного числа тоже учитываются). Какое наибольшее количество сумм может оказаться нечетными?

9.5. Длины всех сторон не обязательно выпуклого пятиугольника $ABCDE$ равны a , величина угла между какой-то парой диагоналей с общей вершиной равна 30° . Доказать, что длина некоторой диагонали пятиугольника тоже равна a .



Всесибирская открытая олимпиада школьников по математике 2013-14 гг.

Заключительный этап

10 класс

Время выполнения 4 астрономических часа

Каждая задача оценивается в 7 баллов.



10.1. Найти все решения в целых числах уравнения: $2^x(4-x)=2x+4$.

10.2. Можно ли найти такой выпуклый и невыпуклый четырёхугольники на плоскости, длины сторон которых в некотором порядке и длины диагоналей которых в некотором порядке совпадают?

10.3. Во вписанном четырёхугольнике $ABCD$ равны длины AB и AC , а также длины BC и CD . Пусть точка P — середина дуги CD , не содержащей A , а Q — точка пересечения AC и BD . Доказать, что прямые PQ и AB перпендикулярны.

10.4. Найти все функции, определённые на множестве всех действительных чисел, принимающие значения в нём же, и удовлетворяющие соотношению: $f((x-y)^2)=f(x)^2-2xf(y)+y^2$ для всех действительных x и y .

10.5. Доказать, что из 11 различных двузначных чисел всегда можно выбрать два не пересекающихся подмножества, средние арифметические чисел в каждом из которых равны.



Всесибирская открытая олимпиада школьников по математике 2013-14 гг.

Заключительный этап

10 класс

Время выполнения 4 астрономических часа

Каждая задача оценивается в 7 баллов.



10.1. Найти все решения в целых числах уравнения: $2^x(4-x)=2x+4$.

10.2. Можно ли найти такой выпуклый и невыпуклый четырёхугольники на плоскости, длины сторон которых в некотором порядке и длины диагоналей которых в некотором порядке совпадают?

10.3. Во вписанном четырёхугольнике $ABCD$ равны длины AB и AC , а также длины BC и CD . Пусть точка P — середина дуги CD , не содержащей A , а Q — точка пересечения AC и BD . Доказать, что прямые PQ и AB перпендикулярны.

10.4. Найти все функции, определённые на множестве всех действительных чисел, принимающие значения в нём же, и удовлетворяющие соотношению: $f((x-y)^2)=f(x)^2-2xf(y)+y^2$ для всех действительных x и y .

10.5. Доказать, что из 11 различных двузначных чисел всегда можно выбрать два не пересекающихся подмножества, средние арифметические чисел в каждом из которых равны.



11.1. Длины сторон вписанного четырехугольника в порядке следования по часовой стрелке равны соответственно, 6,3,5,4. Найти угол между сторонами длины 6 и 3.

11.2. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ - приведённые квадратные трёхчлены. График $g(x)$ повернули на 90° по часовой стрелке и сдвинули параллельно так, что он стал пересекать график $f(x)$ в некоторых четырёх различных точках. Доказать, что эти точки лежат на одной окружности.

11.3. Восемь теннисистов проводят турнир по олимпийской системе: они случайным образом разбиты на 4 четвертьфинальных пары, победители в которых образуют две полуфинальных пары, победители которых играют финальную игру. Силы всех теннисистов равны, каждый из них побеждает в игре с любым другим с вероятностью $\frac{1}{2}$, расписание игр составлено случайным образом. Проигравший очередную игру больше в турнире не участвует. Какова вероятность того, что Вася и Петя, участвующие в турнире, встретятся между собой?

11.4. Найти все тройки натуральных чисел такие, что произведение любых двух из них при делении на третье даёт остаток 1.

11.5. Дан квадрат размера n на n , разбитый вертикальными и горизонтальными линиями сетки на единичные квадратики. Граница квадрата тоже считается линией. *Контуром* называется любая замкнутая ломаная без самопересечений, идущая по линиям сетки. Какое максимальное количество контуров можно провести в квадрате так, чтобы никакие два из них не содержали общего отрезка? Контуров могут иметь общие точки, некоторые из них могут содержать внутри себя частично или целиком другие контуры.



11.1. Длины сторон вписанного четырехугольника в порядке следования по часовой стрелке равны соответственно, 6,3,5,4. Найти угол между сторонами длины 6 и 3.

11.2. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ - приведённые квадратные трёхчлены. График $g(x)$ повернули на 90° по часовой стрелке и сдвинули параллельно так, что он стал пересекать график $f(x)$ в некоторых четырёх различных точках. Доказать, что эти точки лежат на одной окружности.

11.3. Восемь теннисистов проводят турнир по олимпийской системе: они случайным образом разбиты на 4 четвертьфинальных пары, победители в которых образуют две полуфинальных пары, победители которых играют финальную игру. Силы всех теннисистов равны, каждый из них побеждает в игре с любым другим с вероятностью $\frac{1}{2}$, расписание игр составлено случайным образом. Проигравший очередную игру больше в турнире не участвует. Какова вероятность того, что Вася и Петя, участвующие в турнире, встретятся между собой?

11.4. Найти все тройки натуральных чисел такие, что произведение любых двух из них при делении на третье даёт остаток 1.

11.5. Дан квадрат размера n на n , разбитый вертикальными и горизонтальными линиями сетки на единичные квадратики. Граница квадрата тоже считается линией. *Контуром* называется любая замкнутая ломаная без самопересечений, идущая по линиям сетки. Какое максимальное количество контуров можно провести в квадрате так, чтобы никакие два из них не содержали общего отрезка? Контуров могут иметь общие точки, некоторые из них могут содержать внутри себя частично или целиком другие контуры.