Интернет-этап олимпиады по математике, 2007/2008 уч.год

1. Даны 2007 действительных чисел. Известно, что любое из них меньше, чем сумма всех чисел, делённая на 2006. Обязательно ли все эти числа положительные?

2. Докажите, что для любых положительных чисел x, y, z, t выполнено неравенство

$$\frac{y}{x+y+z}+\frac{z}{y+z+t}+\frac{t}{z+t+x}+\frac{x}{t+x+y}>1.$$

3. В бесконечной последовательности натуральных чисел каждый следующий член получается из предыдущего прибавлением одной из его ненулевых цифр. Обязательно ли в этой последовательности встретится число, которое делится на 5?

4. По окружности расставлено $n \geq 5$ положительных действительных чисел так, что каждое из них равно либо сумме своих соседей, либо модулю разности своих соседей. Докажите, что на окружности найдутся такие числа a, b, c и d, что $a + b = c + d$.

5. Миша и Саша решают олимпиадные задачи по математике. Известно, что утром процент решённых задач у Миши был меньше 99 %, а у Саши — больше 99 %; а вечером наоборот: процент решённых задач у Саши стал меньше 99 %, а у Миши — больше 99 %.

а) Обязательно ли в некоторый промежуточный момент процент решённых задач у Саши был ровно 99%?

б) Обязательно ли в некоторый промежуточный момент процент решённых задач у Миши был ровно 99%?