Решения заданий второго этапа Всесибирской олимпиады школьников 2013-2014 г.г. по математике

7 класс

7.1. Можно ли расставить все натуральные числа от 1 до 9 по одному в каждой клетке таблицы 3 на 3 так, что все суммы чисел в любых двух клетках, имеющих общую сторону, будут различными числами?

Ответ. Можно. Слева направо первая строка: 1, 2, 3, вторая строка: 6, 4, 5, третья строка: 7, 8, 9.

7.2. Мальчик врёт по воскресениям и говорит правду по вторникам и средам. Шесть дней подряд его просили назвать своё имя, ответы были такими: Максим, Игорь, Максим, Игорь, Олег, Игорь. Как зовут мальчика?

Ответ: Максим.

По вторникам и средам мальчик говорит правду, значит, в эти дни он бы назвал своё настоящее имя, но среди ответов нет двух одинаковых, идущих подряд имени. Значит, либо мальчика начали спрашивать в среду, либо закончили спрашивать во вторник. Если мальчика закончили спрашивать во вторник, то его зовут Игорь, но тогда и воскресение он сказал правду, а не соврал. Если мальчика начали спрашивать в среду, то его зовут Максим, а в воскресение он соврал, что его зовут Олег.

Критерии: Только ответ – 0 баллов; ответ с проверкой – 2 балла; замечание, что вторник и среда не могут быть одновременно среди этих шести дней – 2 балла; решение, в котором упущен случай, когда последний день вторник – 4 балла.

7.3. Гриша и Глеб лезут на две одинаковые ёлки. Вверх Глеб лезет в три раза медленнее, чем Гриша, а вниз Глеб лезет в два раза быстрее, чем Гриша. Начали и закончили они одновременно. Во сколько раз быстрее Гриша лезет вверх, чем вниз?

Ответ: В 4 раза.

Гриша потратит на то, чтобы залезть на дерево столько же времени, сколько потратит Глеб, чтобы добраться до 1/3 дерева. Глеб потратит на то, чтобы спуститься с дерева столько времени, сколько потратит Гриша, чтобы спуститься с половины дерева. Весь путь у них занял одинаковое время, по условию. Следовательно, промежуточные отрезки пути они преодолели так же за одинаковое время: Глеб пролез 2/3 пути вверх за то же время, за которое Гриша пролез 1/2 вниз. Таким образом, скорость Глеба при перемещении вверх относится к скорости Гриши при перемещении вниз, как 2/3 к 1/2, то есть 4/3. Так как скорость Гриши при перемещении вверх в три раза больше, чем скорость Глеба, то его скорость вверх в 4 раза больше, чем скорость вниз.

Критерии: Только ответ, ответ с проверкой или ответ, полученный подбором – 1 балл; верно составленная система, приводящая к ответу – 3 балла; замечание, что «Глеб пролез 2/3 пути вверх за то же время, за которое Гриша пролез 1/2 вниз» – 3 балла. Эти баллы не суммируются!

7.4. Можно ли из 12 квадратов и 19 равносторонних треугольников с единичными сторонами сложить выпуклый многоугольник? Должны быть использованы все квадраты и треугольники.

Ответ. Можно.

Решение. На длинных сторонах прямоугольника 3 на 4 построим по равностороннему треугольнику с вершинами A и B во вне. От одного из них затем отрежем равносторонний треугольник с вершиной A и стороной 3, а от второго - равносторонний треугольник с вершиной B и стороной 2. Несложно заметить, что прямоугольник разбивается на 12 единичных квадратов, верхняя трапеция на 7, а нижняя — на 12 треугольников со стороной 1.

7.5. На доске написано число 1234. Каждую секунду Маша находит сумму цифр числа, записанного на доске, и приписывает последнюю цифру этой суммы к числу справа, а самую левую цифру исходного числа стирает. Таким образом, сначала на доске было число 1234, затем 2340, 3409, 4096, 0969, 9694 и т.д. Появится ли на доске когда-нибудь число 2013?

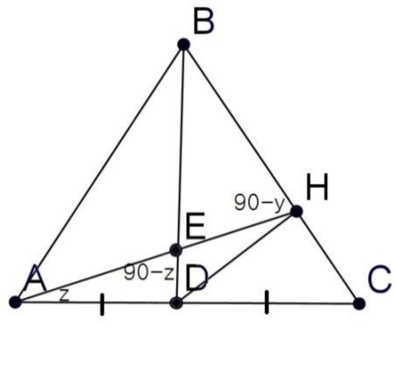
Ответ: Нет, не появится.
Заменим четные числа нулями, а нечетные единицами. При этом по-прежнему каждая новая цифра равна последней цифре суммы четырех старых (сложение осуществляется по правилу: 0+0=0, 0+1=1+0=1, 1+1=10, то есть как в двоичной системе счисления). Выпишем несколько первых чисел: 1010, 0100, 1001, 0010, 0101, 1010. Число 1010 повторилось, значит, дальше будут повторяться только уже выписанные числа, и число 0011 никогда не будет выписано. Но именно 0011 соответствует числу 2013, а значит, и 2013 никогда не появится на доске.
Критерии: Только ответ – 0 баллов.

8 класс

8.1. В неверном равенстве 2×3×2+3×4×3=3×2×3+4×3×2 расставьте скобки так, чтобы оно стало верным.
Ответ: 2×(3×2+3×4)×3=3×(2×3+4×3)×2.
Действительно, 2×18×3=3×18×2.
Критерии: Достаточного одного верного примера. За отсутствие проверки, что получилось верное равенство, не следует снижать баллы.

8.2. Мальчик врёт по воскресениям и говорит правду по вторникам и средам. Шесть дней подряд его просили назвать своё имя, ответы были такими: Максим, Игорь, Максим, Игорь, Олег, Игорь. Как зовут мальчика?
Ответ: Максим.
По вторникам и средам мальчик говорит правду, значит, в эти дни он бы назвал своё настоящее имя, но среди ответов нет двух одинаковых, идущих подряд имени. Значит, либо мальчика начали спрашивать в среду, либо закончили спрашивать во вторник. Если мальчика закончили спрашивать во вторник, то его зовут Игорь, но тогда и воскресение он сказал правду, а не соврал. Если мальчика начали спрашивать в среду, то его зовут Максим, а в воскресение он соврал, что его зовут Олег.
Критерии: Только ответ – 0 баллов; ответ с проверкой – 2 балла; замечание, что вторник и среда не могут быть одновременно среди этих шести дней – 2 балла; решение, в котором упущен случай, когда последний день вторник – 4 балла.

8.3. Гриша и Глеб лезут на две одинаковые ёлки. Вверх Глеб лезет в три раза медленнее, чем Гриша, а вниз Глеб лезет в два раза быстрее, чем Гриша. Начали и закончили они одновременно. Во сколько раз быстрее Гриша лезет вверх, чем вниз?
Ответ: В 4 раза.
Гриша потратит на то, чтобы залезть на дерево столько же времени, сколько потратит Глеб, чтобы добраться до 1/3 дерева. Глеб потратит на то, чтобы спуститься с дерева столько времени, сколько потратит Гриша, чтобы спуститься с половины дерева. Весь путь у них занял одинаковое время, по условию. Следовательно, промежуточные отрезки пути они преодолели так же за одинаковое время: Глеб пролез 2/3 пути вверх за то же время, за которое Гриша пролез 1/2 вниз. Таким образом, скорость Глеба при перемещении вверх относится к скорости Гриши при перемещении вниз, как 2/3 к 1/2, то есть 4/3. Так как скорость Гриши при перемещении вверх в три раза больше, чем скорость Глеба, то его скорость вверх в 4 раза больше, чем скорость вниз.
Критерии: Только ответ, ответ с проверкой или ответ, полученный подбором – 1 балл; верно составленная система, приводящая к ответу – 3 балла; замечание, что «Глеб пролез 2/3 пути вверх за то же время, за которое Гриша пролез 1/2 вниз» – 3 балла. Эти баллы не суммируются!



8.4. Дан равнобедренный треугольник ABC с основанием AC. Из середины основания D на сторону BC опущен перпендикуляр DH. Отрезки AH и BD пересекаются в точке E. Какой из отрезков BH и BE длиннее?

Отает: BH длиннее.

Заметим, что треугольник AED прямоугольный, так как BD медиана в равнобедренном треугольнике, а следовательно и высота. Пусть угол $\angle AHD=y$, $\angle HAD=z$. Тогда угол $\angle AED=90-z$, а угол $\angle BHE=90-y$, так как угол $\angle BHD$ прямой. В прямоугольном треугольнике DHC гипотенуза DC длиннее катета DH, значит, AD>DH. Следовательно, y>z, так как в треугольнике AHD напротив большей стороны лежит больший угол. Таким образом, $\angle EHB=90-y<90-z=\angle BEH$, а следовательно BE<BH.

Критерии: Только ответ – 0 баллов.

8.5. На доске написано число 1234. Каждую секунду Маша находит сумму цифр числа, записанного на доске, и приписывает последнюю цифру этой суммы к числу справа, а самую левую цифру исходного числа стирает. Таким образом, сначала на доске было число 1234, затем 2340, 3409, 4096, 0969, 9694 и т.д. Появится ли на доске когда-нибудь число 2013?

Ответ: Нет, не появится.

Заменим четные числа нулями, а нечетные единицами. При этом по-прежнему каждая новая цифра равна последней цифре суммы четырех старых (сложение осуществляется по правилу: 0+0=0, 0+1=1+0=1, 1+1=10, то есть как в двоичной системе счисления). Выпишем несколько первых чисел: 1010, 0100, 1001, 0010, 0101, 1010. Число 1010 повторилось, значит, дальше будут повторяться только уже выписанные числа, и число 0011 никогда не будет выписано. Но именно 0011 соответствует числу 2013, а значит, и 2013 никогда не появится на доске.

Критерии: Только ответ – 0 баллов.

9 класс

9.1. Можно ли расставить все натуральные чисел от 1 до 9 по одному в каждой клетке таблицы 3 на 3 таки, что все суммы чисел в любых двух клетках, имеющих общую сторону, будут составными числами? Составные числа — это те, которые делятся не только на 1 и на самого себя.

Ответ. Можно**.** Слева направо первая строка: 9, 3, 1, вторая строка: 5, 7, 8, третья строка: 4, 2, 6.

9.2. В ёмкости смешали a килограммов шестипроцентного раствора соли и b килограммов двадцатипроцентного раствора соли. Полученный раствор обладает следующим свойством: при смешивании его с одним килограммом шестипроцентного раствора получается десятипроцентный раствор, а при смешивании с одним килограммом двадцатипроцентного раствора получается восемнадцатипроцентный раствор. Найти a и b.

Ответ. 0,25 кг и 0,5 кг**.**

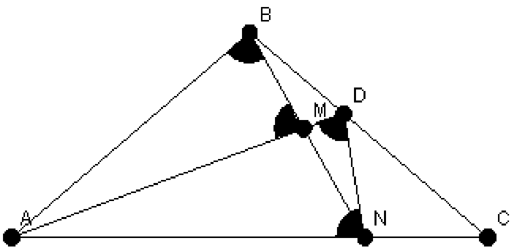
Решение. Согласно условию составляем следующую систему уравнений: $\frac{6}{100}(a+1)+\frac{20}{100}b=\frac{10}{100}(a+b+1),\ \frac{6}{100}a+\frac{20}{100}(b+1)=\frac{18}{100}(a+b+1).$

Избавившись ото всего лишнего, перепишем её в виде: $2a-5b=-2{,}6a-b=1,$ откуда a=0,25 кг и b=0,5 кг**.**

9.3. Можно ли из 12 квадратов и 19 равносторонних треугольников с единичными сторонами сложить выпуклый многоугольник? Должны быть использованы все квадраты и треугольники.

Ответ. Можно**.**

Решение. На длинных сторонах прямоугольника 3 на 4 построим по равностороннему треугольнику с вершинами A и B во вне. От одного из них затем отрежем равносторонний треугольник с вершиной A и стороной 3, а от второго - равносторонний треугольник с вершиной B и стороной 2. Несложно заметить, что прямоугольник разбивается на 12 единичных квадратов, верхняя трапеция на 7, а нижняя — на 12 треугольников со стороной 1.



9.4. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC величины углов при основании равны 40°, а отрезок AD — биссектриса угла BAC. Доказать, что $AC = AD + BD$.

Доказательство. Отметим на отрезке AD точку M такую, что $AM=AB$, и на отрезке AC точку N такую, что $AN=AD$. Заметим, что B,M и N из-за равенства треугольников ABM и AMN лежат на одной прямой

1) Треугольники ABD и AMN равны по двум сторонам и углу между ними, поэтому $BD=MN$.

2) Треугольник ADN является равнобедренным, следовательно $\angle ADN = \angle AND = 80°$.

3) Угол DMN является дополнительным к углу $AMN=100°$, поэтому $\angle DMN = 80°$. Значит, треугольник DMN тоже равнобедренный и $MN=ND$.

4) В ΔCND имеем $\angle CDN=\angle ADC-\angle ADN=120°-80°=40°=\angle NCD$, поэтому ΔCND тоже равнобедренный и $ND=NC$.

5) Таким образом, $BD=NM=ND=NC$, следовательно $AC = AN+NC=AD + BD$, что и требовалось доказать.

9.5. Пусть x,y,z - произвольные натуральные числа такие, что $x + y + z = 100$. Найти максимальное значение суммы $xy + yz + xz$.

Ответ. 3333.

Решение. Сгруппируем $xy + yz + xz = (x + y)z + xy$. При постоянных $x + y$ и z данное выражение максимально при максимальном xy. Произведение xy при постоянной сумме $x + y$ максимально, если, $x = y$ при чётной $x + y$, либо x и y отличаются на 1 при нечётной $x + y$. Если это условие для некоторых значений переменных не выполнено, то $xy + yz + xz$ при этих значениях не максимально. Существование максимального значения следует из конечности количества троек натуральных чисел с суммой 100.

Рассуждая аналогично для других пар переменных, получим, что $xy + yz + xz$ максимально, только когда переменные отличаются друг от друга не больше, чем на 1. Ввиду того, что остаток от деления 100 на 3 равен 1, это возможно только когда два из них равны 33, а третье 34.

10 класс

10.1. Можно ли расставить все натуральные числа от 1 до 9 по одному в каждой клетке таблицы 3 на 3 так, что все суммы чисел в любых двух клетках, имеющих общую сторону, будут различными числами?

Ответ. Можно. Слева направо первая строка: 1, 2, 3, вторая строка: 6, 4, 5, третья строка: 7, 8, 9.

10.2. Решить в целых числах уравнение: $2y^2 + xy = x + y + 5$.

Ответ. (-1,2),(-5,3),(-10,5),(-5,0),(-1,-1),(4,-3).

Решение. Запишем исходное уравнение сначала так: $y(x + y) + y^2 = x + y + 5$, потом вот так: $(y-1)(x + y) + y^2 - 1 = 4$, и разложим его левую часть на множители: $(y-1)(x + 2y + 1) = 4$. Перебрав все возможные варианты разложения четвёрки в произведение двух целых чисел, получим шесть вариантов ответа.

10.3. В четырёхугольнике $ABCD$ длины сторон AB и BC равны 1 см, а величины углов ABC и ADC равны 106° и 127° соответственно. Найти длину диагонали BD.

Ответ. Длина BD равна 1 см.

Решение. Проведём окружность с центром B радиусом 1 см. Вписанный в неё угол, соответствующий центральному углу ABC равен 53°, что вместе с с углом ADC даёт 53°+127°=180°. Следовательно, вершина D тоже лежит на этой окружности и лина BD равна радиусу окружности, то есть 1 см.

10.4. Пусть x, y, z - произвольные неотрицательные числа такие, что $xy + yz + xz = 3$. Найти минимальное значение суммы $x + y + z$.

Ответ. 3.

Решение. Рассмотрим $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + xz)$. Заметив, что $x^2 + y^2 \geq 2xy$, $x^2 + z^2 \geq 2xz$, $z^2 + y^2 \geq 2zy$, получим: $(x + y + z)^2 \geq 3(xy + yz + xz) \geq 9$, откуда $x + y + z \geq 3$. Тройка достигается, когда все переменные равны 1.

10.5. В министерстве некоторые из 46 руководящих сотрудников объединены в **триады** - преступные сообщества из трёх человек, по предварительному сговору занимающиеся махинациями с подведомственными активами и взятками. Любые две различные триады пересекаются не более, чем по одному общему сотруднику. Доказать, что министр, зная составы триад, всегда может составить из сотрудников министерства комиссию по борьбе с коррупцией в количестве 10 человек, не содержащую ни одну триаду целиком.

Доказательство. Возьмём полный список сотрудников и сначала назначим председателем комиссии первого по алфавиту из них, назовём его А. Затем, на первом шаге включим в комиссию следующего по алфавиту сотрудника Б. Если А и Б вместе с некоторым сотрудником В составляют преступную тройку, вычеркнем В из списка. На втором шаге добавим в комиссию первого из оставшихся не вычеркнутыми сотрудников Г и вычеркнем из списка сотрудников, составляющих триады с В и А либо с В и Б , если они есть. Их будет вычеркнуто не более двух и они не совпадают с А или Б.

Продолжим так далее, на очередном шаге включая первого, не вычеркнутого из списка и ещё не состоящего в комиссии сотрудника Х, при этом вычёркивая тех, кто составляет триады с Х и включенными ранее членами комиссии. После этого вычёркивания всех оставшихся в списке можно включать в комиссию на следующем шаге. При этом на n - ом шаге в комиссию добавляется один сотрудник, а вычёркивается из общего списка не более, чем n сотрудников. Всего список свободных сотрудников укорачивается не более, чем на $n+1$ человека. С учётом председателя, за восемь шагов будет назначено девять членов комиссии, а список сократится не более, чем на 1+2+3+...+9=45 человек. Оставшийся как минимум один сотрудник и будет десятым в комиссии.

11 класс

11.1. Пусть $f(x) = ax^2 - x + c$ - квадратный трёхчлен такой, что уравнение $f(f(x)) = x$ не имеет решений. Доказать, что тогда $ac > 1$.

Доказательство. Из условия следует, что уравнение $f(x) = x$ тоже не имеет корней. Тогда дискриминант его $4 - 4ac < 0$, откуда $ac>1$.

11.2. Найти количество различных способов расстановки всех натуральных чисел от 1 до 9 по одному в каждой клетке таблицы 3 на 3 таких, что суммы чисел в каждой строке и каждом столбце нечётны. Таблица не крутится и не переворачивается.

Ответ. 9·5!·4!=25920.

Решение. Чтобы суммы чисел в каждой строке и каждом столбце были нечётны, нужно, чтобы каждая строка и каждый столбец содержали нечётное количество нечётных чисел. Всего среди чисел от 1 до 9 нечётных чисел пять, поэтому единственно возможным является случай, когда одна строка и один столбец содержат по три нечётных числа, а остальные – по одному. Имеем 9 возможностей выбора «креста» строка-столбец с тремя нечётными числами, сами нечётные числа в кресте можно расставлять произвольно, то есть 5! способами. Вне креста стоят только чётные числа в произвольном порядке, то есть 4! способами. Все возможности выбора независимы, поэтому ответ получается перемножением: 9·5!·4!=25920.

11.3. Решить в целых числах систему уравнений: $x + y + z = 1, x^3 + y^3 + z^2 = 1$. (Внимание: во втором уравнении степень переменной z именно вторая!)

Ответ. (0,1,0), (1,0,0), (-2,-3,6), (-3,-2,6), (0,-2,3), (-2,0,3), $(m,-m,1), m \in Z$ **.**

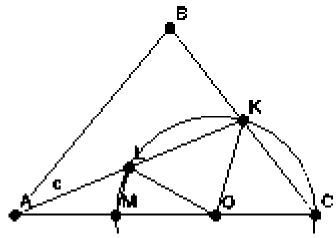
Решение. Из первого уравнения $x + y = 1 - z$, тогда из второго $x^3 + y^3 = (x+y)(1+z)$. Разлагаем на множители: $(x+y)(x^2 + y^2 - xy - z - 1) = 0$. Первая скобка даёт бесконечную серию решений $(m,-m,1), m \in Z$.

Заменив во второй скобке $z = 1 - x - y$, рассмотрим её как квадратное уравнение относительно переменной y с коэффициентами, зависящими от x: $y^2 + (1-x)y + x^2 + x - 2 = 0$. Его дискриминант равен: $(1-x)^2 - 4(x^2 + x - 2) = -3(x-1)(x+3)$, в силу его неотрицательности имеем $x \in \{-3, -2, -1, 0, 1\}$. Соответствующие значения y будут равны: $x = -3, y = -2; x = -2, y = -3; x = -2, y = 0; x = -1, y = -1 \pm \sqrt{3}; x = 0, y = -2; x = 0, y = 1; x = 1, y = 0$

Отбрасывая нецелые решения, получаем ответ.

11.4. В треугольнике *ABC* точка *K* — середина стороны *BC*, а точка *L* – середина медианы *AK*. Известно, что центр описанной окружности треугольника *KCL* лежит на стороне *AC* и окружность пересекает эту сторону в точке *M* такой, что *AC:AM=3:1*. Найти отношение *AB:BC:AC*.

Ответ. *AB:BC:AC* = $\sqrt{6} : \sqrt{6} : 3 = \sqrt{2} : \sqrt{2} : \sqrt{3}$



Решение. Обозначим центр описанной окружности треугольника KCL за O, тогда точки M и O делят сторону AC на три равных отрезка. По теореме Фалеса LM параллелен KO и равен его половине. В равнобедренном треугольнике LMO отношение длины боковой стороны к основанию равно 2, откуда $\cos LMO = \frac{1}{4} = \cos KOC$. Если обозначить длину OC за 1, то из треугольника KOC находим $KC = \sqrt{2 - 2 \cdot \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$, откуда $AC = 3 \cdot OC = 3, BC = 2 \cdot KC = \sqrt{6}$. Теперь из равнобедренного треугольника COK находим $\cos ACB = \cos OCL = \sqrt{\frac{3}{8}}$**,** и по теореме косинусов $AB^2 = 9 + 6 - 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{\frac{3}{8}} = 6 = BC^2$.

11.5. В министерстве некоторые из 43 сотрудников объединены в **квартеты -** преступные сообщества из четырёх человек, по предварительному сговору занимающиеся махинациями с подведомственными активами и взятками. Любые два различных квартета пересекаются не более, чем по одному общему сотруднику. Доказать, что министр, зная составы квартетов, всегда может составить из сотрудников министерства комиссию по борьбе с коррупцией в количестве 13 человек, не содержащую ни одного квартета целиком.

Доказательство. Доказательство проходит в целом аналогично, но со следующими отличиями. Сначала выбираем председателя комиссии и его зама, назовём их А и Б. На первом шаге включим в комиссию следующего по алфавиту сотрудника В. Если А, Б и В вместе с некоторым сотрудником Г составляют квартет, вычеркнем Г из списка.

Продолжим так далее, на очередном шаге включая первого, не вычеркнутого из списка и ещё не состоящего в комиссии сотрудника X, при этом вычёркивая тех, кто составляет квартеты с X и некоторой парой включенных ранее членов комиссии. После этого вычёркивания всех оставшихся в списке можно включать в комиссию на следующем шаге. При этом на n - ом шаге в комиссию добавляется один сотрудник, а вычёркивается из общего списка не более, чем $\frac{n+1}{2}$ сотрудников, так как по условию влияющие на вычёркивание пары включенных ранее членов комиссии не должны пересекаться. Всего на n - ом шаге список свободных сотрудников укорачивается не более, чем на $\frac{n+3}{2}$ человека. После десяти шагов будут выбраны 12 членов комиссии, и останется единственный свободный (временно, хотелось бы надеяться) сотрудник. Он и станет тринадцатым членом комиссии! Остаётся пожелать этой комиссии плодотворной работы. Да пребудет с ней Сила!