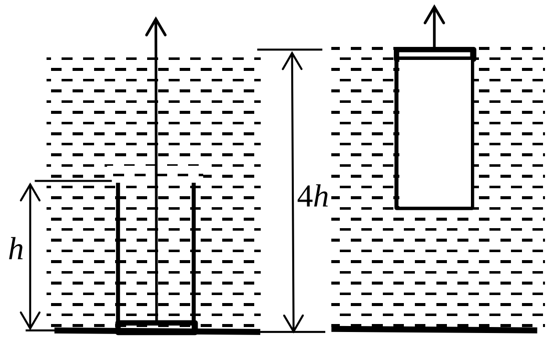
Заключительный этап Всесибирской Открытой Олимпиады Школьников по физике
9 марта 2025 г.
10 класс

1. На дне водоема стоит цилиндр, закрытый легким поршнем, прилегающем ко дну. Масса цилиндра m, высота h, площадь поршня S, глубина водоема $4h$, плотность воды ρ_0. К поршню привязали трос и начали медленно поднимать поршень (и цилиндр) до высоты, когда поршень и верхняя кромка цилиндра оказались на поверхности воды. Определите работу, совершенную в этом процессе. Атмосферное давление P_0, ускорение свободного падения g, весом троса пренебречь.



<u>Возможное решение:</u>

В рамках задачи выполняется закон сохранения энергии в силу рассмотрения системы «поршень-цилиндр» как единое целое.

Работа силы тяги F расходуется на изменение потенциальной энергии системы (цилиндра и воды).

$A_F = \Delta E_m + \Delta E_{воды}$

Изменение потенциальной энергии цилиндра происходит за счет изменения положения центра масс. Он перемещается с высоты h/2 до высоты 3,5h => $\Delta E_m = 3mgh$

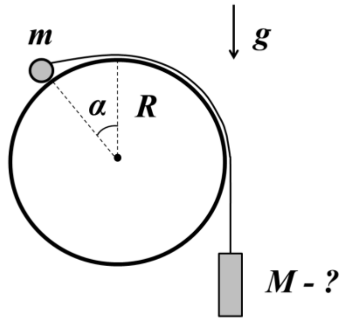
Изменение объема цилиндра составляет $\Delta V = Sh$ => $\Delta m_{воды} = Sh\rho$

$E_{воды(к)} = 4h\, \Delta m_{воды} g$, $E_{воды(н)} = (7/2)\, h\, \Delta m_{воды} g$ => $\Delta E_{воды} = h/2\ Sh\rho = \rho g S(h^2/2)$

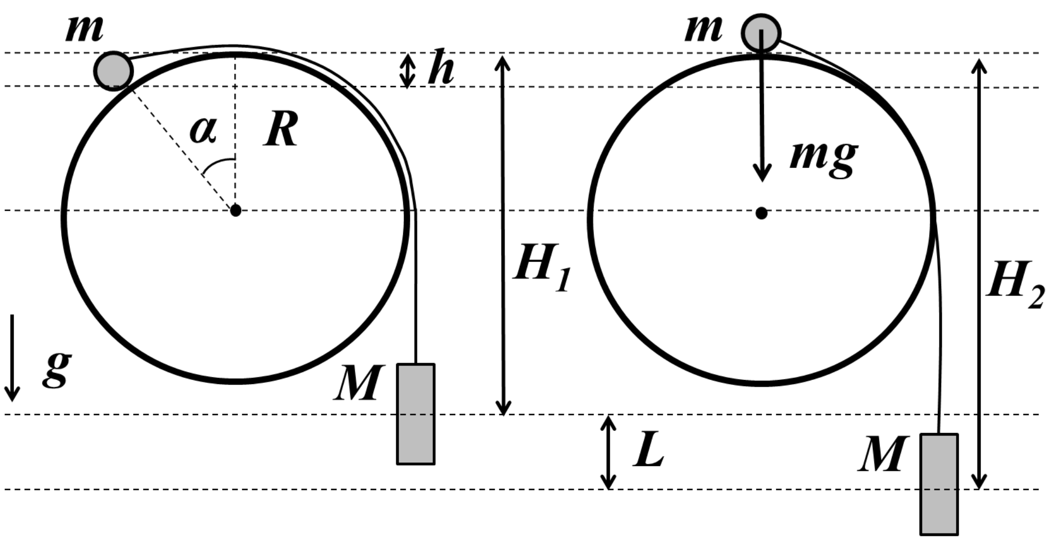
Итоговый ответ $A_F = 3mgh + \rho g S(h^2/2)$

Пункт	Описание	Формула	Балл
1	Указание на использование ЗСЭ (в каком либо виде)	A = dU + Ea	1
2	Вычислено изменение потенциальной энергии цилиндра	dU = 3mgh	3
3	Вычислено изменение потенциальной энергии воды Указан способ или идея вычисления	$Ea = \rho g S(h^2/2)$	4 1
4	Получен верный ответ	$A = 3mgh + \rho g S(h^2/2)$	1

2. Небольшой шарик массой $\boldsymbol{m}$ удерживается на гладкой цилиндрической трубе радиусом $\boldsymbol{R}$. Труба закреплена и ось трубы горизонтальна. Шарик связан с грузом невесомой и нерастяжимой нитью, как показано на рисунке. В начальный момент груз висит на нити и покоится. Затем шарик аккуратно отпускают, после чего шарик с грузом начинает двигаться. В некоторый момент времени шарик отрывается от трубы, причём к этому моменту шарик успевает проскользить по трубе путь, равный $\boldsymbol{\alpha \cdot R}$ (вертикальное положение). Найдите массу груза. Ускорение свободного падения $\boldsymbol{g}$.



Возможное решение: Изобразим систему в начальный момент и в момент отрыва шарика от трубы :



Из условия задачи следует, что к моменту отрыва шарик успеет проскользить дугу, которая опирается на угол $\boldsymbol{\alpha}$. Нить нерастяжима, поэтому путь шарика вдоль трубы равен расстоянию, на которое опустится груз к тому же моменту времени :

$$L = \alpha R$$

$$L = H_2 - H_1$$

Из геометрии следует, что шарик к моменту отрыва сместится вверх по вертикали на следующее расстояние :

$$h = R(1 - \cos\alpha)$$

В момент отрыва на шарик действует сила притяжения Земли и сила натяжения нити. Центростремительное ускорение шарика направлено к центру трубы и определяется только силой тяжести. Сила натяжения нити направлена по касательной к трубе и никак не влияет на центростремительное ускорение. Запишем второй закон Ньютона для шарика в момент отрыва :

$$\frac{mv^2}{R} = mg$$

Из последнего уравнения выразим квадрат скорости шарика в момент отрыва:

$$v^2 = gR$$

Выберем уровень нуля потенциальной энергии. Пусть этот уровень проходит через вершину трубы. Запишем закон сохранения энергии для шарика и связанного с ним груза :

$$-mgh - MgH_1 = -MgH_2 + \frac{Mv^2}{2} + \frac{mv^2}{2}$$

Преобразуем последнее равенство:

$$MgL = \frac{Mv^2}{2} + \frac{mv^2}{2} + mgh$$

Заметим, что сила реакции опоры не совершает работы, так как она перпендикулярна скорости, а сила натяжения является внутренней силой системы, поэтому работа силы натяжения также отсутствует в написанном законе сохранения энергии. Равенство скоростей шарика и груза следует из нерастяжимости нити, которая их связывает.

Подставим в последнее уравнение найденный ранее квадрат скорости шарика:

$$MgL = \frac{MgR}{2} + \frac{mgR}{2} + mgh$$

Выполним преобразования последнего уравнения :

$$2ML = MR + mR + 2mh$$

$$M(2L - R) = m(R + 2h)$$

$$M = m\frac{R + 2h}{2L - R}$$

$$M = m\frac{R + 2R(1 - \cos\alpha)}{2\alpha R - R}$$

$$M = m\left(\frac{3 - 2\cos\alpha}{2\alpha - 1}\right)$$

Выполним анализ полученного ответа.

Числитель дроби $(3 - 2\cos\alpha)$ является положительным для любого действительного значения угла α.

Знаменатель дроби $(2\alpha - 1)$ должен быть положительным, так как масса является положительной величиной:

$$2\alpha - 1 > 0$$

$$\alpha > \frac{1}{2}$$

Если $\alpha < 1/2$, то условие задачи не выполнится, то есть шарик оторвётся от трубы не в верхней, а в некоторой другой точке.

Заметим, наконец, что строгое равенство $\alpha = 1/2$ приводит к тому, что масса груза должна быть бесконечной, что, конечно, не является физически осмысленным решением.

Ответ

$$M = m\left(\frac{3 - 2\cos\alpha}{2\alpha - 1}\right)$$

Критерий	**Балл**
Представлен рисунок для момента отрыва шарика от трубы	1
Учтено, что путь шарика по трубе равен смещению груза вниз	1
Записано смещение шарика по вертикали к моменту отрыва	2
Записан второй закон Ньютона для шарика в момент отрыва	2
Записан закон сохранения энергии	2
Выполнены преобразования и получен ответ	2

3. Длинный стержень массы M лежит на горизонтальном шероховатом полу. Коэффициент трения равен μ. Найти минимальную величину внешней горизонтальной силы для того, чтобы сдвинуть тело. Внешняя горизонтальная сила может быть приложена в любом направлении.

<u>Возможное решение:</u> Размерами тела пренебречь нельзя, соответственно, необходимо учитывать вращение тела вокруг некоторой точки вращения O.

Для минимизации силы F, приложить ее следует к краю стержня, в направлении перпендикулярном оси стержня.

Запишем условия равновесия:

$\Sigma F = 0, \Sigma M = 0$

Обозначим расстояние от одного края до точки O за X, а от второго края до O за Y.

Тогда, $X + Y = L$

А силы трения (приложенные к центрам масс отдельных кусков) оказываются пропорциональны доле длины стержня.

$F_{тр_1} = \mu mg\, X/L$

$F_{тр_2} = \mu mg\, Y/L$

Из первого условия равновесия:

$F + F_{тр_2} = F_{тр_1} \Rightarrow F + \mu mg\, Y/L = \mu mg\, X/L \Rightarrow F = \mu mg\, (X - Y)/L$

Из второго:

$F*X = F_{тр_1} * X/2 + F_{тр_2} * Y/2 \Rightarrow F*X = \mu mg\, (X^2 + Y^2)/2L$

Подставляя одно уравнение в другое с учетом преобразований получаем:

$2X^2 - 2XY = X^2 + Y^2 \Rightarrow 2X^2 = (X + Y)^2 = L^2 \Rightarrow X = L/\sqrt{2}$

⇨ $F = \mu mg\, (X - Y)/L = (\sqrt{2} - 1) *\mu mg \simeq 0{,}41\, \mu mg < \mu mg/2$

Пункт	Описание	Формула	Балл
1	Указано, что сила действует перпендикулярно стержню		1
2	Условия равновесия	$\Sigma F = 0, \Sigma M = 0$	2
3	Проведен анализ формулы и получена точка приложения силы	$L/(\sqrt{2})$	4
4	Получен ответ	$(\sqrt{2} - 1) *\mu mg$ $\mu mg/2$ μmg	1 2 0 (сумма)

4. Тело бросают под углом α к горизонту с начальной скоростью v0. На расстоянии L от места броска тело достигает максимальной высоты за всё время полёта. На тело действует сила сопротивления воздуха, пропорциональная скорости движения тела. Оцените, какое максимальное ускорение может иметь тело в верхней точке траектории.

Возможное решение: Поймем, от чего зависит ускорение в верхней точке:

$$m\bar{a} = m\bar{g} + \bar{F}$$

В верхней точке сила сопротивления перпендикулярна силе тяжести, следовательно

$$a^2 = g^2 + \frac{F^2}{m^2}$$

Отсюда можно сделать вывод, что чем больше отношение $\frac{F}{m}$, тем больше ускорение.

Рассмотрим движение от момента броска до верхней точки:

$$m\frac{\Delta\bar{v}}{\Delta t} = m\bar{g} - k\bar{v}$$

По оси ОХ:

$$v_x\Delta t = \Delta x \rightarrow mv_x = -k\Delta x$$

Для оценки суммирование по малым участкам Δt можно заменить конечной разностью:

$$m(v_x(T) - v_x(0) \approx -kL$$

Где T –время полета до верхней точки. $v_x(T) = v_x(0) - \frac{L}{m}k$

Исследуем силу сопротивления в верхней точке:

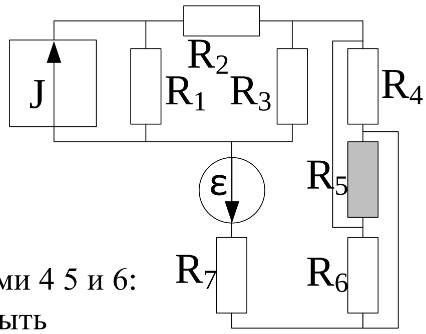
$$F = -kv_x(T) = -\frac{L}{m}k^2 - v_x(0)\,k$$

Найдя вершину параболы запишем:

$$k_{\text{в}} = \frac{m\,v_x(0)}{2L} \rightarrow F(k_{\text{в}}) = \frac{m\,{v_x}^2(0)}{4L} \rightarrow a = \sqrt{g^2 + \frac{{v_0}^4 cos^4(\alpha)}{16L^2}}$$

Критерий	**Балл**
Второй закон Ньютона	1
Выражение для ускорения	2
$m\frac{\Delta\bar{v}}{\Delta t} = m\bar{g} - k\bar{v}$	2
$mv_x = -k\Delta x$	2
Сила сопротивления в точке	1
Ответ	2

5. Найдите мощность, выделяемую на сером резисторе, если известно, что J = 6A ε = 12В,
$R_1 = 2\ \Omega$ $R_2 = R_4 = R_5 = R_6 = 3\ \Omega$, $R_3 = 5\ \Omega$, а
$R_7 = 2.5\ \Omega$.



<u>Возможное решение:</u>

Найдем эквивалентное сопротивление участка с резисторами 4 5 и 6:
$R_4 \| R_5 \| R_6 = 1\ \Omega$. (Узлы соединены перемычками и могут быть объединены)
Воспользуемся методом эквивалентного генератора для упрощения цепи. Преобразуем источник тока J:

$$\varepsilon' = \frac{J}{R_1} = 12\ \text{В}$$

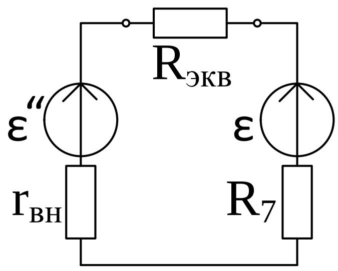
Теперь рассчитаем эквивалентное преобразование для участка с резисторами 1 2 и 3:

$$r_{\text{вн}} = R_1||(R_2 + R_3) = 2.5\ \Omega$$

$$\varepsilon" = \frac{\varepsilon' R_3}{(R_1 + R_2 + R_3)} = 6\ \text{В}$$

Итоговая схема после преобразования достаточно проста для дальнейших расчётов.

Запишем второе правило Кирхгофа и найдем ток через эквивалентное сопротивление:



$$\sum \varepsilon = (r_{\text{вн}} + R_7 + R_{\text{экв}})I \ \rightarrow \ I = 1A$$

Отсюда ток через серый резистор I = I/3, а значит выделяемая мощность:

$$P = I^2_{\text{сер}} \cdot \mathrm{R}_5 = \frac{1}{3}\ \text{Вт}$$

Решение с помощью полной системы уравнений Кирхгофа также оценивалось согласно полноте системы и математических выкладок.

Критерий	**Балл**
Нахождение эквивалентного сопротивления участка цепи	1
Преобразование источника тока	2
Нахождение внутреннего сопротивления эквивалентного источника в ветви	1
Нахождение напряжения холостого хода (ЭДС) источника в ветви	2
Запись второго закона Кирхгофа для преобразованной цепи	2
Ответ	2