

**Решения и критерии проверки задач заключительного этапа
Всесибирской олимпиады школьников 2020-2021 г.г. по математике
7 класс**

Каждая задача оценивается в 7 баллов

7.1. Приведите пример натурального числа, кратного 2020, такого, что его сумма цифр тоже кратна 2020.

Решение: Подходит, например, число 20202020...2020, в котором фрагмент 2020 повторяется 505 раз. Такое число, очевидно, делится на 2020, а сумма его цифр равна $505 \times 4 = 2020$.

Критерии: Любой правильный ответ с проверкой или без – 7 баллов.

Верно придумана концепция примера, но ошибка в вычислениях (например, 2020 повторяется 500 раз) – 3 балла.

7.2. Лада и Лера нарисовали по треугольнику. Лада выбрала два угла своего треугольника, и Лера заметила, что среди углов её треугольника есть равный сумме этих двух углов. После этого Лада выбрала другую пару углов в своём треугольнике, а Лера снова нашла у своего угол, равный сумме углов этой пары. Докажите, что Лада нарисовала равнобедренный треугольник.

Решение: Заметим, что в двух парах углов, выбранных Ладой, есть ровно один общий (иначе в треугольнике было бы хотя бы 4 угла). Назовём угол, который участвует в обеих парах, α , а два других угла треугольника Лады β и γ . В треугольнике Леры есть угол, равный $\alpha + \beta$, и угол, равный $\alpha + \gamma$. Если это два разных угла, то их сумма равна $\alpha + \beta + \alpha + \gamma = 180^\circ + \alpha$ (так как в треугольнике Лады сумма углов равна $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$), что больше 180° . Это невозможно, значит, это один и тот же угол, откуда следует $\alpha + \beta = \alpha + \gamma$, поэтому $\beta = \gamma$, то есть, треугольник равнобедренный.

7.3. В некотором городе есть улица в форме правильного шестиугольника, в каждой из вершин которого живёт человек. Любой житель этой улицы является либо рыцарем, который всегда говорит правду, либо лжецом, который всегда лжёт. Каждый из них знает своих соседей и имена остальных (но не знает, где они живут), однако, никто ни про кого не знает, рыцарь он или лжец. Однажды Лёшка, живущий в одной из вершин, решил узнать, кто живёт в противоположном от него доме. Он может отправить письмо на имя любого человека и спросить: “Верно ли, что ты соседствуешь с тем-то?”, на что получит ответ “Да” или “Нет”. После этого он может отправить следующее письмо, возможно, другому человеку с вопросом про другого, и т. д. Как Лёшка может осуществить задуманное, если он собирается отправить не более четырёх писем?

Решение: Пусть остальных людей зовут А, В, С, D, Е, при этом Лёшка знает, что его соседей зовут А и Е. Пусть тогда он пошлёт людям В и С по два письма с вопросами о людях А и Е.

Если на оба письма человек отвечает: “Да”, – он врёт, так как одновременно рядом с А и D живёт только сам Лёшка. Значит, отвечающий так живёт напротив Лёшки.

Действительно, если бы он там не жил, то соседствовал бы с А или Е, и на один из вопросов соврал бы и ответил “Нет”.

Если на оба письма человек отвечает: “Нет”, – он говорит правду. Действительно, если бы он врал, то должен был бы жить рядом и с А, и с Е, то есть обязан был бы быть Лёшкой. А если человек не сосед ни А, ни Е, то он живёт напротив Лёшки.

Таким образом, если кто-то на оба письма ответил одинаково, то Лёшка удовлетворил своё любопытство.

Если человек отвечает на одно письмо утвердительно, а на другое отрицательно, то он обязательно сосед либо А, либо Е. Действительно, если он рыцарь, то он написал правду, когда отвечал утвердительно, а если лжец, то соврал, когда отвечал отрицательно. Таким образом, если оба адресата дали пару разных ответов на вопросы Лёшки, то никто из них не живёт напротив него. В этом случае Лёшка понимает, что напротив него живёт человек D.

Критерии: Только алгоритм без обоснования – 3 балла.

Решение с пропущенными случаями – не более 5 баллов.

7.4. Два пловца стартовали одновременно по соседним дорожкам в 50-метровом бассейне на дистанции 1 км. Каждый плыл со своей постоянной скоростью. Первый пловец, завершив заплыв, вышел из бассейна. Второй продолжал плыть по дистанции. Всего пловцы встретились 16 раз (когда первый догоняет второго – это тоже встреча; момент старта встречей не считается). Во сколько раз первый пловец может быть быстрее второго? Перечислите все варианты и докажите, что других нет.

Ответ: В $3/2$, $5/3$ или 5 раз.

Решение: Когда первый пловец переплывал бассейн в одну сторону (а это происходило 20 раз), он встречал второго ровно один раз (возможно, у бортика). Встреча в момент старта не учитывается, поэтому встреч было 19 минус количество встреч у бортиков до финиша первого – такая встреча в нашем подсчёте учитывалась дважды. При этом встреча в момент финиша первого пловца потери не даёт.

Значит, во время заплыва пловцы встречались у бортиков трижды. Рассмотрим момент первой такой встречи. К этому времени первый проплыл какое-то целое число a бассейнов, а второй целое число b . Тогда скорости пловцов относятся как a/b . Сократим эту дробь и будем считать, что скорости относятся как p/q .

Если p и q нечётны, то при проплывании первым p бассейнов, второй оказывается у того же бортика, то есть, происходит встреча, и далее они повторяются через такие же промежутки. Отсюда следует, что $3p < 20$ (через три встречи первый не мог закончить, так как $3p$ нечётное) и $20 \leq 4p$, так как встреч было максимум 4, считая момент финиша первого. Значит, $p = 5$, и $q = 1$ или $q = 3$. Несложно проверить, что обе дроби $5/1$ и $5/3$ подходят.

Если же p и q имеют разную чётность, то в момент проплывания первым p бассейнов, они со вторым находятся у противоположных бортиков, и встреча, собственно, у бортика произойдёт, когда первый проплывёт $2p$, $4p$, $6p \dots$ бассейнов. Значит, чтобы встреч было всего три, $6p \leq 20 < 8p$, откуда $p = 3$, $q = 2$.

Критерии:

Только ответ – 0 баллов.

Ответ с проверкой, других продвижений нет – 1 балл. Этот балл не суммируется с остальными.

Доказано, что пловцы встречались у бортиков трижды – 1 балла.

Доказано, что скорости относятся как дробь – ещё 1 балл.

Верно рассмотрен один из случаев в решении – ещё 3 балла.

Верно рассмотрен второй – ещё 2 балла.

За отсутствие проверки того, что отношения подходят, баллы не снимать.

7.5. Архипелаг состоит из n островов, между любыми двумя из которых ходит свой паром. Проезд на каждом пароме стоит одинаково в обе стороны, но при этом на любых двух различных паромов стоимости различны. Путешественник хочет прилететь на вертолёт на один из островов, а затем проплыть на $n - 1$ пароме таким образом, что каждый раз за проезд он будет платить меньше, чем платил до этого. То, что он может оказаться на каком-то острове несколько раз, его не смущает. Прилететь на вертолёт можно на любой остров, все стоимости проезда путешественнику известны. Докажите, что он сможет осуществить задуманное.

Решение 1: Уберём все паромы, а затем начнём запускать их обратно по одному в порядке возрастания цены (первым запустим самый дешёвый, вторым – самый дешёвый из остальных, и т. д.). В каждый момент в каждом острове будем писать максимальное количество паромов, на которых можно последовательно проехать, начав от этого острова, так, чтобы цены проезда монотонно убывали.

В начальный момент все числа на островах равны нулю. Пусть в некоторый момент мы вводим паром, соединяющий острова A и B , в которых до этого были написаны числа a и b соответственно. После введения нового паромов в A будет число, не меньшее $b+1$ (ибо теперь из A можно проехать новым паромом в B , а затем по маршруту длины b , начинавшемуся из B). Аналогично, в B будет написано число, не меньшее $a+1$. Поэтому сумма чисел в A и B увеличится хотя бы на 2, а числа на остальных островах не уменьшатся. Значит, и сумма всех чисел на островах увеличится хотя бы на 2.

Таким образом, когда все паромы будут введены, сумма чисел на островах станет не меньше, чем $n(n - 1)$. Значит, хотя бы на одном острове будет число, не меньшее $n - 1$. Это и означает наличие требуемого маршрута от этого острова.

Решение 2. Разделим каждый паром, курсирующий между A и B , на два – идущий из A в B и идущий из B в A . Получится $n(n - 1)$ полупаромов. Мы построим n выделенных маршрутов (по одному, начинающемуся от каждого острова) так, чтобы цена поездки на каждом монотонно убывала, и каждый полупаром содержался бы хотя бы в одном выделенном маршруте. Тогда один из выделенных маршрутов будет содержать не менее $n - 1$ полупаромов, что нам и требуется.

Выделенный маршрут, начинающийся от произвольного острова A , выглядит так. Пусть $A_0 = A$. Рассмотрим все полупаромы A_0X , выходящие из A_0 , и выберем из них полупаром A_0A_1 максимальной цены a_1 . Затем рассмотрим все полупаромы A_1Y , выходящие из A_1 , цена которых меньше a_1 ; если такие есть, выберем из них полупаром A_1A_2 максимальной цены a_2 , и т. д. Маршрут заканчивается полупаромом $A_{k-1}A_k$, если из A_k не выходит полупаром с ценой, меньшей a_k .

Осталось показать, что каждый полупаром ВС попадёт хотя бы в один из выделенных маршрутов. Положим $V_1 = B$, $V_0 = C$, и пусть b_1 – цена ВС. Рассмотрим все полупаромы XV_1 , ведущие в V_1 , с ценой, большей b_1 . Если такие есть, то выберем из них полупаром V_2V_1 наименьшей цены b_2 . Далее рассмотрим все полупаромы YV_2 , ведущие в V_2 , с ценой, большей b_2 . Выберем из них полупаром V_3V_2 наименьшей цены b_3 , и т. д. Этот процесс выбора закончится, когда при некотором k полупаром V_kV_{k-1} – это полупаром максимальной цены, выходящий из V_k . Согласно нашему построению, выделенный маршрут, выходящий из V_k , последовательно пройдёт через V_{k-1} , ..., V_1 , V_0 , то есть будет содержать полупаром ВС.

**Решения и критерии проверки задач заключительного этапа
Всесибирской олимпиады школьников 2020-2021 г.г. по математике
8 класс**

Каждая задача оценивается в 7 баллов

8.1. Из квадрата 5 на 5 вырезана угловая клетка. Разрежьте его по линиям сетки на шесть многоугольников равной площади таким образом, чтобы среди них была ровно одна пара одинаковых.

Решение: Пример разрезания приведён на рисунке

Критерии: Любой верный пример – 7 баллов.

Нет верного примера, но доказано, что повторяется Т-образная фигурка – 1 балл.

Замечание: Несложно заметить, что всего существует пять различных многоугольников площади 4, значит, в верном примере каждый, кроме одного, встречается ровно 1 раз. Кроме того, если раскрасить доску и фигурки в шахматную раскраску, можно доказать, что повторяться должна в точности Т-образная фигурка.

2	2	1	1	
2	2	3	1	1
4	3	3	3	5
4	4	5	5	5
4	6	6	6	6

8.2. В сказочной стране каждый поросёнок либо всегда врёт, либо всегда говорит правду, причём каждому поросёнку достоверно известно про каждого, лжец ли он. Однажды Ниф-Ниф, Наф-Наф и Нуф-Нуф встретились за чашечкой чая, и двое из них сделали по заявлению, однако, неизвестно, кто именно что произнёс. Один из трёх поросят сказал: “Ниф-Ниф и Наф-Наф оба всегда врут”. Другой: “Ниф-Ниф и Нуф-Нуф оба всегда врут”. Определите, сколько врунов среди трёх поросят.

Ответ: Два

Решение: Если хотя бы одно из высказываний верно, то упомянутые в нём поросята являются лжецами, а значит, лжецов хотя бы два. При этом говорящий это верное утверждение должен говорить правду. Значит лжецов не больше двух. Итого, если хотя бы одна из сказанных фраз верна, то лжецов двое. Отметим, что это возможно, если, например, первую фразу говорит Нуф-Нуф.

Если оба высказывания не верны, то говорящие их – лжецы. А значит, лжецов хотя бы два. При этом в каждой фразе, чтобы она была ложной, должен быть упомянут хотя бы один честный поросёнок. Значит, он есть, то есть лжецов не более двух. Таким образом, и в этом случае лжецов ровно два. Отметим, что и эта ситуация возможна, если единственным честным поросёнком является Ниф-Ниф и он молчит.

Критерии: Только ответ – 0 баллов.

Пример, что врунов может быть 2, других продвижений нет – 1 балл.

Переборное решение, в котором пропущены случаи – не более 4 баллов.

За отсутствие проверки, что врунов действительно может быть два, баллы не снимать.

8.3. В городе живут четыре ювелира, которым царь выслал 13 мешков с золотом. В первом мешке лежал один слиток золота, во втором – два, в третьем – три, ..., в тринадцатом – 13 золотых слитков. Один из мешков сразу куда-то потерялся, а

оставшиеся ювелиры распределили так, что каждому досталось и равное количество золотых слитков, и равное количество мешков. При этом мешок с одним слитком достался первому ювелиру, с тремя – второму, с одиннадцатью – третьему. Определите, какие мешки достались четвёртому ювелиру, если слитки из мешков не доставали.

Ответ: 2, 9, 10

Решение: Всего слитков было $1+2+3+\dots+13 = 91$. Когда один мешок потерялся, то оставшееся число слитков стало кратно 4. Число 91 даёт остаток 3 при делении на 4, то есть потерялся мешок либо с 3, либо с 7, либо с 11 слитками. Из условия знаем, что мешки с 3 и 11 слитками на месте, значит, потерялось 7 слитков, и их осталось 84.

Значит, каждому ювелиру досталось по 21 слитку и по 3 мешка.

Первому ювелиру нужно два мешка, в которых суммарно будет 20 слитков (так как один мешок с одним слитком у него уже есть). Это можно сделать одним из следующих способов: $13+7$ (но 7 слитков потеряли), $12+8$, $11+9$ (но 11 у другого ювелира). Значит, у первого мешки с 1, 8 и 12 слитками.

Второму ювелиру до 21 слитка не хватает 18. Это количество с помощью двух мешков можно набрать так: $13+5$, $12+6$ (но 12 слитков у первого), $11+7$ (но 7 слитков потерялись), $10+8$ (но 8 слитков у первого). Значит, у второго в мешках 3, 5 и 13 слитков.

Третьему ювелиру до 21 слитка не хватает ещё 10. Это количество с помощью двух мешков можно набрать так: $9+1$ (но 1 слиток у первого), $8+2$ (но 8 слитков у первого), $7+3$ (но 7 слитков потерялись), $6+4$. Значит, у третьего в мешках 4, 6, 11 слитков.

Таким образом, остались только мешки с 2, 9, 10 слитками, которые и достались четвёртому ювелиру.

Критерии: Только ответ – 0 баллов.

Пример, в котором для каждого ювелира расписано, кому какой мешок достался, других продвижений нет – 1 балл. Этот балл не суммируется с остальными.

Доказано, что потерялся мешок с 7 слитками – 1 балл.

Доказано, что ювелиру достались определённые мешки – по 2 балла за каждого. Эти баллы суммируются друг с другом и предыдущим пунктом.

8.4. На отрезке AB выбрали точку M и построили равнобедренные треугольники AMC и MBN с основаниями AM и MB соответственно. Оказалось, что точки B , N и C лежат на одной прямой, а $AB = BC$. Перпендикуляр к отрезку AC , опущенный из B , пересекает отрезок CM в точке H . Докажите, что NH – биссектриса угла MNC .

Решение: Треугольник ABC равнобедренный. Пусть его углы при основании равны x , а оставшийся угол y . Таким образом, $2x + y = 180^\circ$.

Треугольник AMC равнобедренный, значит, $\angle AMC = \angle CAM = x$.

Треугольник MNB равнобедренный, значит, $\angle MBN = \angle BMN = y$.

Так как точки A , M , B лежат на прямой, то $\angle AMC + \angle CMN + \angle NMB = 180^\circ$. Из этого следует, что $x + \angle CMN + y = 180^\circ = 2x + y$. Значит, $\angle CMN = x$.

Итак, MC – биссектриса внешнего угла $\angle AMN$ треугольника BMN . Прямая BH содержит высоту равнобедренного треугольника ABC , проведённую к основанию, а значит, является биссектрисой $\angle MBN$ треугольника MBN . Следовательно, H – центр

вневыписанной окружности треугольника MBN , так как является точкой пересечения биссектрисы внешнего и биссектрисы внутреннего угла этого треугольника. Значит, и биссектриса внешнего угла $\angle MNC$ треугольника MBN проходит через точку H . Таким образом, NH – биссектриса угла $\angle MNC$.

Критерии: Доказано, что $\angle CMN = \angle AMC - 2$ балла.

То, что три биссектрисы, из которых две внешние, пересекаются в одной точке, считать общеизвестным фактом.

Замечание: Доказательство того, что две внешних биссектрисы и одна внутренняя пересекаются в одной точке, проводится точно так же, как и для трёх внутренних биссектрис. Достаточно рассмотреть их как ГМТ, равноудалённых от сторон угла.

8.5. Архипелаг состоит из n островов, между любыми двумя из которых ходит свой паром. Проезд на каждом пароме стоит одинаково в обе стороны, но при этом на любых двух различных паромов стоимости различны. Путешественник хочет прилететь на вертолёт на один из островов, а затем проплыть на $n - 1$ пароме таким образом, что каждый раз за проезд он будет платить меньше, чем платил до этого. То, что он может оказаться на каком-то острове несколько раз, его не смущает. Прилететь на вертолёт можно на любой остров, все стоимости проезда путешественнику известны. Докажите, что он сможет осуществить задуманное.

Решение 1: Уберём все паромы, а затем начнём запускать их обратно по одному в порядке возрастания цены (первым запустим самый дешёвый, вторым – самый дешёвый из остальных, и т. д.). В каждый момент в каждом острове будем писать максимальное количество паромов, на которых можно последовательно проехать, начав от этого острова, так, чтобы цены проезда монотонно убывали.

В начальный момент все числа на островах равны нулю. Пусть в некоторый момент мы вводим паром, соединяющий острова A и B , в которых до этого были написаны числа a и b соответственно. После введения нового паромов в A будет число, не меньшее $b+1$ (ибо теперь из A можно проехать новым паромом в B , а затем по маршруту длины b , начинавшемуся из B). Аналогично, в B будет написано число, не меньшее $a+1$. Поэтому сумма чисел в A и B увеличится хотя бы на 2, а числа на остальных островах не уменьшатся. Значит, и сумма всех чисел на островах увеличится хотя бы на 2.

Таким образом, когда все паромы будут введены, сумма чисел на островах станет не меньше, чем $n(n - 1)$. Значит, хотя бы на одном острове будет число, не меньшее $n - 1$. Это и означает наличие требуемого маршрута от этого острова.

Решение 2. Разделим каждый паром, курсирующий между A и B , на два – идущий из A в B и идущий из B в A . Получится $n(n - 1)$ полупаромов. Мы построим n выделенных маршрутов (по одному, начинающемуся от каждого острова) так, чтобы цена поездки на каждом монотонно убывала, и каждый полупаром содержался бы хотя бы в одном выделенном маршруте. Тогда один из выделенных маршрутов будет содержать не менее $n - 1$ полупаромов, что нам и требуется.

Выделенный маршрут, начинающийся от произвольного острова A , выглядит так. Пусть $A_0 = A$. Рассмотрим все полупаромы A_0X , выходящие из A_0 , и выберем из них полупаром A_0A_1 максимальной цены a_1 . Затем рассмотрим все полупаромы A_1Y , выходящие из A_1 , цена которых меньше a_1 ; если такие есть, выберем из них полупаром

A_1A_2 максимальной цены a_2 , и т. д. Маршрут заканчивается полупаромом $A_{k-1}A_k$, если из A_k не выходит полупаром с ценой, меньшей a_k .

Осталось показать, что каждый полупаром BC попадёт хотя бы в один из выделенных маршрутов. Положим $V_1 = B$, $V_0 = C$, и пусть b_1 – цена BC . Рассмотрим все полупаромы XV_1 , ведущие в V_1 , с ценой, большей b_1 . Если такие есть, то выберем из них полупаром V_2V_1 наименьшей цены b_2 . Далее рассмотрим все полупаромы YV_2 , ведущие в V_2 , с ценой, большей b_2 . Выберем из них полупаром V_3V_2 наименьшей цены b_3 , и т. д. Этот процесс выбора закончится, когда при некотором k полупаром V_kV_{k-1} – это полупаром максимальной цены, выходящий из V_k . Согласно нашему построению, выделенный маршрут, выходящий из V_k , последовательно пройдёт через $V_{k-1}, \dots, V_1, V_0$, то есть будет содержать полупаром BC .

**Решения заданий заключительного этапа Всесибирской открытой олимпиады
школьников по математике 2020-2021 гг.
Каждая задача оценивается из 7 баллов.**

9 класс

9.1. Доказать, что в любом 100-значном натуральном числе можно вычеркнуть одну цифру так, чтобы в получившемся 99-значном числе количество семёрок, стоящих на чётных (считая слева), позициях, было не больше количества семёрок, стоящих на нечётных, (считая слева), позициях.

Доказательство. Пусть количества семёрок, стоящих на нечётных (считая слева), позициях исходного и получившегося чисел равны a и a' соответственно, а количества семёрок, стоящих на их чётных (считая слева), позициях равны b и b' соответственно.

1) Пусть $a \geq b$. В таком случае вычёркиваем последнюю, самую правую, цифру. Номера позиций каждой цифры в исходном и получившемся числах совпадают, при вычеркивании пропала цифра с чётной позиции, поэтому $a' = a \geq b \geq b'$.

2) Пусть $a < b$. В таком случае вычёркиваем первую, самую левую, цифру. Номера позиций каждой цифры в исходном и получившемся числах меняют чётность, при вычеркивании пропала цифра с нечётной позиции, поэтому тем более $a' = b > a \geq b'$.

Критерии проверки. Верно рассмотрен только один из случаев 1) и 2): 3 балла.

9.2. В каждой клетке таблицы 3 на 3 записано некоторое целое число так, что все восемь сумм троек чисел, записанных в клетках каждой строки, каждого столбца и каждой из двух диагоналей, равны одному числу S (то есть таблица является магическим квадратом 3 на 3). Доказать, что S делится на 3.

Доказательство. Обозначим сумму чисел в каждой строке, каждом столбце и обеих диагоналях за S . Рассмотрим сумму чисел в четырёх из рассматриваемых в условии троек: второй строки, второго столбца и двух диагоналей. Она равна с одной стороны $4S$, а с другой – сумме всех чисел таблицы плюс утроенное число в центральной клетке. Сумма всех чисел таблицы равна $3S$, поэтому S равно утроенному числу в центральной клетке, то есть делится на 3.

9.3. Пусть P – основание высоты, опущенной из вершины A прямоугольного треугольника ABC на его гипотенузу BC , а M – середина отрезка CP . Обозначим за E точку на продолжении стороны AB за точку B такую, что $AB=BE$. Доказать, что прямые EP и AM перпендикулярны.

Доказательство. Пусть N – точка на катете AC такая, что отрезок MN параллелен высоте AP . Прямоугольные треугольники CMN и APB подобны по двум прямым углам APB и CMN , а также равным углам BAP и MCN , поэтому равны отношения их соответствующих сторон $CN:AB$ и $CM:AP$. Следовательно, в треугольниках CMA и APB равны отношения соответствующих сторон $CA:AE=2CN:2AB=CN:AB$ и $CM:AP$, прилежащих к равным углам $MCA=MCN$ и $PAE=PAB$. Значит, треугольники CMA и APB тоже подобны, а их соответствующие углы MAC и PEA равны. Тогда величина угла AEP равна величине соответствующего ему угла MAC , а сумма углов EAM и AEP равна 90 градусов, следовательно, угол между прямыми EP и AM равен углу EAC , то есть 90 градусов, что и требовалось доказать.

Критерии проверки. Доказано подобие треугольников CMA и APB : 3 балла.

9.4. Определим последовательность $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{100}$ следующим образом: пусть x_1 – произвольное положительное число, меньшее 1, и $x_{n+1} = x_n - x_n^2$ для всех $n=1, 2, 3, \dots, 99$. Докажите, что $x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_{99}^3 < 1$.

Доказательство. Докажем сначала, что $1 > x_1 > x_2 > x_3 > \dots > x_{100} > 0$. Для этого воспользуемся индукцией по $n = 1, 2, 3, \dots, 99$. База индукции $x_1 \in (0, 1)$ по условию. Шаг индукции: при $x_n \in (0, 1)$ выполнены неравенства $0 < x_n^2 < x_n$, поэтому $x_{n+1} = x_n - x_n^2 < x_n < 1$ и $x_{n+1} = x_n - x_n^2 > 0$, то есть $x_{n+1} \in (0, 1)$.

Ввиду доказанного, $x_n^3 < x_n^2 = x_n - x_{n+1}$ для всех $n = 1, 2, 3, \dots, 99$, поэтому $x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_{100}^3 < x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{100}^2 = x_1 - x_2 + x_2 - x_3 + \dots + x_{99} - x_{100} + x_{100}^3 = x_1 - x_{100} + x_{100}^3 < x_1 < 1$, что и требовалось доказать.

Критерии проверки. Доказано, что $1 > x_1 > x_2 > x_3 > \dots > x_{100} > 0$: 3 балла.

9.5. На шахматной доске 8 на 8 некоторым образом расставлены 8 ладей, ни одна из которых не бьёт другую. Доказать, что каждую из них можно сдвинуть одновременно в одну из соседних с ней по диагонали клеток таким образом, что и после сдвига ни одна из них не будет бить другую. *Напомним*, что шахматная ладья бьёт все клетки горизонтали и вертикали, в которой она стоит, а клетка, соседняя с данной по диагонали – это клетка, имеющая с ней общую вершину, но не сторону. При перемещении ладья может встать на клетку, в которой ранее стояла другая ладья.

Доказательство. Разделим доску 8 на 8 на 16 квадратиков 2 на 2 клетки и передвинем каждую попавшую в некоторый квадратик ладью в соседнюю с ней по диагонали клетку этого же квадрата. В частности, если таких ладьи в некотором квадратике окажется две, они поменяются местами. При этом номера вертикалей и горизонталей, в которые сдвигаются ладьи взаимно однозначно определяются номерами вертикалей и горизонталей, в которых ладьи стояли до сдвига. Следовательно, после перестановки две ладьи не могут попасть в одну вертикаль (горизонталь), так как для этого они до неё должны стоять в одной вертикали (горизонтали).

Критерии проверки. Нет явно прописанного обоснования, что после сдвига ни одна ладья не будет бить другую: минус 4 балла.

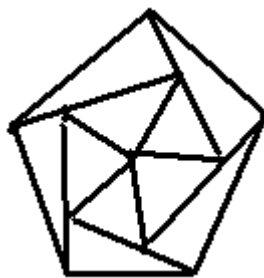
10 класс

10.1. Докажите, что для любого $x \neq 0$ выполнено неравенство: $x^8 - x^5 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^4} > 0$.

Доказательство. Преобразуем исходное неравенство к эквивалентному виду $x^8 - x^5 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^4} = \frac{x^{12} - x^9 - x^3 + 1}{x^4} = \frac{(x^3 - 1)(x^9 - 1)}{x^4} = \frac{(x^3 - 1)^2(x^6 + x^3 + 1)}{x^4}$. В полученном выражении $(x^3 - 1)^2 \geq 0, x^2 > 0$ при всех $x \neq 0$ и $x^6 + x^3 + 1 = (x^3 + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} > 0$ при всех x , поэтому оно неотрицательно при всех $x \neq 0$.

10.2. Разрезать правильный пятиугольник на несколько треугольников так, чтобы каждый из них граничил ровно с тремя другими. Граничить – **значит** иметь общий отрезок границы.

Решение. Например, можно разрезать так:



Критерии проверки. Если в примере используются треугольники, имеющие только общие вершины: 0 баллов.

10.3. Найти все натуральные n , для которых на клетчатой доске размера n на n клеток можно отметить n клеток, стоящих в разных горизонталях и разных вертикалях, которые можно последовательно обойти ходом шахматного коня, начиная с некоторой, не вставая на одну клетку дважды, и вернуться на исходную клетку. Конь при этом может вставать только на отмеченные клетки.

Ответ. $n = 4$.



Решение. Пример для $n = 4$. несложен: . Докажем, что при $n \neq 4$. требуемого в условии набора клеток не существует.

Предположим, при данном n удалось отметить n клеток в разных горизонталях и разных вертикалях доски n на n , которые можно последовательно обойти ходом шахматного коня и вернуться в исходную отмеченную клетку. Рассмотрим величины горизонтальных перемещений коня при его последовательных ходах по отмеченным клеткам вертикалей доски. Конь либо придёт в клетку на вертикали **a** (первой слева) из клетки на вертикали **b** (второй слева), а затем уйдёт в клетку на вертикали **c** (третьей слева), либо наоборот. В первом случае (второй случай симметричен первому), чтобы не было повторов вертикалей, прийти на вертикаль **b** он может только с вертикали **d**, а уйти с вертикали **c** может только на вертикаль **e**. Все предшествующие приходу на вертикаль **d** и последующие за уходом с вертикали **e** ходы делаются с горизонтальным смещением 2, кроме одного со смещением 1, который замкнёт цепь перемещений коня и может произойти только у правого края доски. Всего конь сместится по горизонтали 2 раза на одну клетку и $n - 2$ раза на две клетки. Ровно то же самое можно сказать и о его вертикальных перемещениях по горизонталям доски. Каждым ходом конь смещается в одном направлении на одну клетку, а в другом – на две, поэтому в общем наборе из всех его $2n$ смещений в обоих направлениях число смещений на одну клетку должно совпадать с числом смещений на две клетки, откуда $2n - 4 = 4$ и $n = 4$.

Критерии проверки. Идея рассмотрения ходов по трём крайним вертикалям (горизонталям) доски: 2 балла.

10.4. Пусть $m < n$ - натуральные числа. Доказать, что среди произвольных последовательных n натуральных чисел всегда найдутся два, произведение которых делится на mn .

Доказательство. Рассмотрим произвольные n последовательных натуральных чисел, назовём их множеством A . Остатки от деления n последовательных натуральных чисел на n принимают, в некотором циклическом порядке все значения $0, 1, \dots, n - 2, n - 1$, поэтому среди них всегда найдётся число, делящееся на n . Поскольку $m < n$, то среди тех же чисел найдётся число, делящееся на m . Если первое и второе найденные числа различны, то их произведение делится на mn .

Предположим, что оба найденных числа совпадают и равны c . Обозначим наибольший общий делитель m и n за $d < n$, тогда $m = d \cdot m_1, n = d \cdot n_1$, причём m_1 и n_1 взаимно просты. Ввиду того, что c делится на m и n , оно делится и на их наименьшее общее кратное, равное $d \cdot m_1 \cdot n_1$. Чтобы получить произведение, делящееся на $mn = d^2 \cdot m_1 \cdot n_1$, достаточно найти среди чисел множества A второй сомножитель, делящийся на d . Числа $c - d$ и $c + d$ делятся на d , поэтому, если одно из них лежит в A , его можно взять в качестве второго сомножителя для c . Если же оба они не лежат в A , то первое меньше всех чисел из A , а второе – больше всех чисел из A , поэтому их разность, равная $2d$, не меньше $n + 1$. Тогда $d > \frac{n}{2}$, что невозможно, так как d – собственный делитель n и не может превосходить $\frac{n}{2}$ – противоречие.

Критерии проверки. Верно рассмотрен только случай, когда первое и второе найденные числа различны: 2 балла.

10.5. На отрезке AB отмечена произвольная точка M , отличная от A и B . С одной стороны от прямой AB выбрана точка C , а с другой – точки D и E такие, что треугольники ABC , AMD и MBE являются равносторонними. Обозначим через P , Q , R точки пересечения медиан треугольников ABC , AMD и MBE соответственно. Доказать, что: а) треугольник PQR – равносторонний, б) точка пересечения медиан треугольника PQR лежит на отрезке AB .

Решение. а) Обозначим за T точку пересечения прямых AQ и BR . Четырёхугольник $APBT$ является ромбом с углами 60° и 120° при вершинах A и P , треугольники APT и BPT – равносторонние. Заметим, что $AP = \frac{AB}{\sqrt{3}}, AQ = \frac{AM}{\sqrt{3}}, BR = \frac{BM}{\sqrt{3}}$ и $AM + BM = AB$, поэтому

$AP = AQ + BR = AT = BT$. Следовательно, $QT = BR, PT = PB$ и треугольники QTP и RBP равны по углам $QTP = RBP = 60^\circ$ и парам прилежащих к ним сторон. Кроме того, угол между соответственными сторонами PT и PB тоже равен 60° , значит треугольник QTP получается из треугольника RBP поворотом относительно вершины P на 60° по часовой стрелке. Следовательно, стороны QP и RP треугольника PQR равны и угол QPR между ними составляет 60° , значит оставшиеся два угла также равны 60° треугольник PQR – равносторонний.

б) Заметим, что углы PQR и PTR равны 60° , поэтому точка Q лежит на описанной окружности треугольника PTR . Следовательно, описанные окружности треугольников PTR и PQR совпадают. Обозначим точку пересечения медиан треугольника PQR за S , она является и центром описанной окружности этого треугольника, совпадающей с описанной окружностью треугольника PTR . Значит, точка S лежит на серединном перпендикуляре AB к хорде PT данной окружности, что и требовалось доказать.

Критерии проверки. Пункт а) 4 балла, пункт б) 3 балла.

11 класс

11.1. На сторонах AB , BC , CD и DA квадрата $ABCD$ соответственно отмечены точки P , Q , R , S , отличные от вершин. Известно, что длина стороны квадрата равна 1, доказать, что выполнены неравенства:

$$2 \leq PQ^2 + QR^2 + RS^2 + SP^2 < 4.$$

Доказательство. Для длин четырёх отрезков из неравенства запишем четыре теоремы Пифагора, $PS^2 = AP^2 + SA^2, PQ^2 = BP^2 + BR^2, QR^2 = CQ^2 + CR^2, RS^2 = DR^2 + DS^2$. Сложим эти равенства и перегруппируем результат в виде:

$$PQ^2 + QR^2 + RS^2 + PS^2 = (AP^2 + PB^2) + (BQ^2 + QC^2) + (CR^2 + RD^2) + (DS^2 + SA^2).$$

Каждое из выражений в скобках имеет вид $f(x) = x^2 + (1-x)^2 = 2x^2 - 2x + 1$, для некоторого $0 < x < 1$ и заключено в интервале от $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ (включая) до $f(1) = 1$ (исключая). Следовательно, сумма $PQ^2 + QR^2 + RS^2 + SP^2$ заключена в интервале от $4f(\frac{1}{2}) = 2$ (включая) до $4f(1) = 4$ (исключая), что и требовалось доказать.

11.2. Найти все натуральные n , которые можно представить в виде суммы $n = a^2 + b^2$, где a - минимальный делитель n , отличный от 1, и b - какой-то делитель n .

Ответ. 8 и 20.

Решение. Если n нечётно, то и все его делители нечётны. поэтому правая часть равенства $n = a^2 + b^2$ чётна – противоречие. Следовательно, n чётно и его минимальный неединичный делитель a равен 2, а $n = 4 + b^2$. По условию, b делит $n = 4 + b^2$, значит, делит и разность $n - b^2 = 4$, поэтому b должно быть равно одному из чисел 1, 2, 4. При этом n равно 5, 8, 20 соответственно. Первый случай не подходит ввиду нечётности, остальные два удовлетворяют условию задачи.

Критерии проверки. Доказано, что n - чётно: 1 балл. Упущено одно из решений: минус 2 балла. Только угаданы оба ответа с проверкой: 1 балл.

11.3. Найти все действительные числа a , для которых существуют три различных действительных числа x, y, z таких, что $a = x + \frac{1}{y} = y + \frac{1}{z} = z + \frac{1}{x}$.

Ответ. $a = \pm 1$.

Решение. Предположим, что a удовлетворяет условию задачи. Из первого равенства выразим $x = a - \frac{1}{y} = \frac{ay - 1}{y}$ и подставим в третье: $z = a - \frac{1}{x} = a - \frac{y}{ay - 1} = \frac{a^2y - y - a}{ay - 1}$.

Последнее выражение подставим во второе равенство:

$$a = y + \frac{1}{z} = y + \frac{ay - 1}{(a^2 - 1)y - a} = \frac{(a^2 - 1)y^2 - 1}{(a^2 - 1)y - a}, \quad \text{откуда получаем соотношение}$$

$(a^2 - 1)(y^2 - ay + 1) = 0$, являющееся квадратным уравнением относительно y , если $a^2 - 1 \neq 1$. Ввиду симметричности соотношений в условии, тому же уравнению удовлетворяют и оставшиеся переменные x и z . Всё это вместе даёт три различных корня квадратного уравнения $y^2 - ay + 1 = 0$, что невозможно. Следовательно, $a^2 = 1, a = \pm 1$.

Если $a^2 = 1$, то для любого значения y положим $x = a - \frac{1}{y} = \frac{ay - 1}{y}$, $z = \frac{-a}{ay - 1}$, тогда

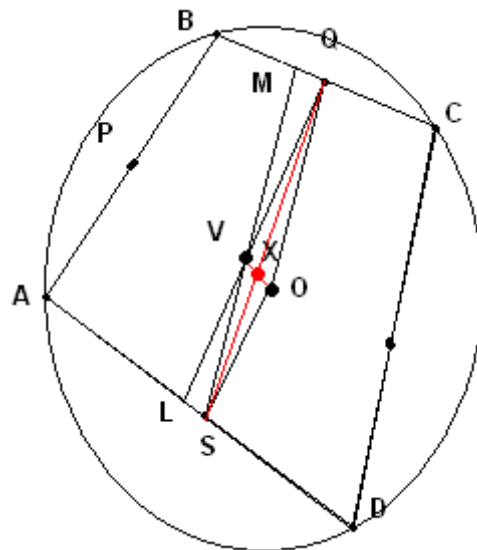
$$a = y + \frac{1}{z} = \frac{(a^2 - 1)y^2 - 1}{(a^2 - 1)y - a} = \frac{1}{a} - \text{соотношения условия выполнены. Требование различности}$$

x, y, z при этом равносильно тому, что y не является корнем квадратного уравнения $y^2 - ay + 1 = 0$. Последнее уравнение не имеет действительных корней так как его дискриминант равен $a^2 - 4 = -3$ - отрицателен, следовательно, для любого y полученная тройка различных чисел x, y, z удовлетворяет условию задачи.

Критерии проверки. Доказано, что a может равняться только 1 или -1: 5 баллов. Доказано, что для $a = \pm 1$ существуют три различных числа x, y, z : 2 балла.

11.4. Доказать, что четыре перпендикуляра, опущенных из середин сторон произвольного вписанного четырёхугольника на его противоположные стороны, пересекаются в одной точке.

Доказательство. Обозначим вершины произвольного вписанного в окружность четырёхугольника за A, B, C и D , центр окружности за O , середины сторон AB, BC, CD и DA за P, Q, R и S соответственно. Отрезки OQ и OS являются серединными перпендикулярами к сторонам BC и AD , поэтому они параллельны перпендикулярам SM и QL , опущенным на эти стороны из середин противоположных сторон четырёхугольника. Обозначим точку пересечения этих перпендикуляров за V , из параллельности отрезков OQ и SV , а также OS и QV следует, что четырёхугольник $OSVQ$ является параллелограммом. Следовательно, его диагонали SQ и OV пересекаются в точке X , делящей их пополам. Диагональ SQ при этом является средней линией четырёхугольника $ABCD$, поэтому точка V пересечения перпендикуляров QL и SM , опущенных из середин сторон BC и AD на противоположные стороны четырёхугольника, симметрична центру O описанной окружности относительно середины X отрезка SQ , соединяющего середины сторон BC и AD .



Аналогично доказывается, что точка W пересечения перпендикуляров, опущенных из середин сторон AB и CD на противоположные стороны четырёхугольника, симметрична центру O описанной окружности относительно середины отрезка PR , соединяющего середины сторон AB и CD . Хорошо известно, что четырёхугольник $PQRS$, образованный серединами сторон произвольного четырёхугольника $ABCD$, образуют параллелограмм, стороны которого параллельны диагоналям AC и BD и равны их половинам. Следовательно, отрезки PR и QS , являющиеся диагоналями параллелограмма $PQRS$, делятся точкой их пересечения пополам, поэтому их середины совпадают. Значит, совпадают и точки W и V , симметричные центру O относительно этих середин. Таким образом, все четыре перпендикуляра, опущенных из середин сторон вписанного четырёхугольника $ABCD$, пересекаются в точке $V=W$, симметричной центру O описанной окружности относительно точки пересечения средних линий PR и QS этого четырёхугольника.

Критерии проверки. Известный факт о параллелограмме $PQRS$ достаточно чётко сформулировать, но не доказывать.

11.5. В некоторых клетках прямоугольной доски размера 101 на 99 сидят по одной черепашке. Каждую минуту каждая из них одновременно переползает в одну из клеток доски, соседнюю с той, в которой они находятся, по стороне. При этом, каждый следующий ход делается ими в направлении, перпендикулярном предыдущему: если предыдущий ход был горизонтальным - налево или направо, то следующий будет вертикальным - вверх или вниз, и наоборот. Какое максимальное количество черепашек может перемещаться по доске неограниченное время так, что в каждый момент в каждой клетке будет находиться не более одной черепашки?

Ответ. 9800.

Решение. Примеры неограниченного движения по доске 9800 черепашек.

Пример 1. Рассадим пресмыкающихся в клетки прямоугольника, состоящего из клеток, стоящих на пересечении 98 нижних горизонталей и 100 левых вертикалей. Ходить они будут одинаково: сначала все направо, потом все вверх, потом все налево и затем все вниз.

После 4 ходов ситуация совпадёт с первоначальной., поэтому движение может продолжаться разрешённым образом сколь угодно долго.

Пример 2. Исходная рассадка черепашек как в примере 1, но движение организовано так: разбиваем их на квадратики 2 на 2 клетки, в каждом из которых они одновременно двигаются по часовой стрелке.

Докажем, что большее, чем 9800, количество черепашек правильно рассадить на доске 101 на 99 нельзя. Предположим противное, что черепашки размещены на доске некоторым образом так, что у них есть возможность неограниченно долго перемещаться по доске указанным в условии способом и не оказываясь на одной клетке в количестве двух и более одновременно. Раскрасим клетки доски в шахматном порядке так, что левая нижняя клетка, как обычно, чёрная. Получится 5000 чёрных и 4999 белых клетки. Среди чёрных клеток *нечётными* назовём клетки, номера вертикали и горизонтали которых нечётны, и чётными - номера вертикали и горизонтали которых чётны. Заметим, что для белых клеток один из этих номеров чётен, а другой – нечётен. Нечётных чёрных клеток будет $51 \cdot 50 = 2550$, а чётных чёрных клеток $50 \cdot 49 = 2450$. Ясно, что в каждый момент количество черепашек на чётных чёрных клетках не должно превосходить 2450.

Заметим, что при выполнении двух последовательных ходов меняется чётность обеих координат каждой черепашки, поэтому после двух ходов все черепашки с нечётных чёрных клеток переместятся на чётные чёрные клетки и наоборот, а черепашки с белых клеток переместятся снова на белые клетки. Следовательно, в любой момент времени количество черепашек на всех чёрных клетках не превосходит $2 \cdot 2450 = 4900$.

Наконец, при выполнении одного хода черепашки с чёрных клеток переходят на белые и наоборот, поэтому общее количество черепашек на всей доске не может превосходить $2 \cdot 4900 = 9800$.

Замечание. На самом деле, мы доказали, что, если черепашек на доске больше, чем 9800, то, они смогут сделать не более двух ходов, не оказываясь на одной клетке в количестве двух и более одновременно.

Критерии проверки. Доказательство максимальности числа 9800: 6 баллов. Построение примера для 9800 черепашек: 1 балл. Попытка доказать любую другой оценки, кроме 9800: 0 баллов.