Всесибирская открытая олимпиада школьников по математике 2014-15 г.г.

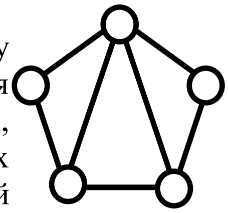
Второй этап **15 декабря 2014 г. - 25 января 2015 г.**

7 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

7.1. В булочной есть пирожки с двумя начинками (яблочной и вишнёвой) и двух видов (жареные и печёные). Докажите, что можно купить два пирожка, которые будут отличаться и начинкой, и по способу приготовления.

7.2. Аня нарисовала картинку: круги, некоторые из которых соединены между собой (см. рис.). Пришёл Гриша и расставил в кругах натуральные числа. Аня заметила, что отношение любых двух чисел, стоящих в соединенных кругах, равно либо 3, либо 9. А Гриша сказал, что отношение любых двух чисел, стоящих в кругах не соединенных, не равно ни 3, ни 9. Приведите пример такой расстановки.



7.3. Разносторонний треугольник поделён на две части некоторой прямой. Докажите, что эти части не могут быть равными фигурами.

7.4. Две девочки вяжут с постоянными, но разными скоростями. При этом первая девочка уходит пить чай каждые 5 минут, а вторая — каждые 7 минут. Если девочка ушла пить чай, то она потратит на это ровно 1 минуту. Когда девочки в очередной раз пошли пить чай вместе, оказалось, что связали они одинаково много. На сколько процентов производительность первой девочки выше, если начали вязать они одновременно?

7.5. В городе 9 остановок и несколько автобусов. Любые два автобуса имеют не более одной общей остановки. У каждого автобуса ровно три остановки. Какое максимальное число автобусов может быть в городе?

Всесибирская открытая олимпиада школьников по математике 2014-15 гг.

Второй этап **15 декабря 2014 г. - 25 января 2015 г.**

8 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

8.1. Два горных козлика Геннадий и Николай устроили соревнование. Геннадий делает два прыжка по 6 метров за то же время, за которое Николай делает 3 прыжка по 4 метра. Козлики договорились скакать вдоль прямой, повернуть не раньше чем через 2 километра и вернуться обратно. Кто быстрее преодолеет этот путь?

8.2. В квадрате 3 на 3 расставьте девять подряд идущих целых чисел, так чтобы числа, стоящие в клетках, соседних по стороне и диагонали, не имели бы общих делителей, отличных от 1.

8.3. Аня нарисовала квадрат $ABCD$. Затем она построила равносторонний треугольник ABM так, что вершина M оказалась внутри квадрата. Диагональ AC пересекает треугольник в точке K. Докажите, что $CK = CM$.

8.4. Пусть p — нечётное простое число. Докажите, что для некоторой пары различных натуральных чисел m и n имеет место равенство $2/p = 1/n + 1/m$, причем такая пара чисел единственна (с точностью до перестановки n и m).

8.5. В городе 9 остановок и несколько автобусов. Любые два автобуса имеют не более одной общей остановки. У каждого автобуса ровно три остановки. Какое максимальное число автобусов может быть в городе?

Всесибирская открытая олимпиада школьников по математике 2014-15 гг.

Второй этап **15 декабря 2014 г. - 25 января 2015 г.**

9 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

9.1. Электронные часы на здании вокзала показывают часы и минуты текущего момента времени в формате ЧЧ:ММ от 00:00 до 23:59. Сколько времени в течение одних суток на часах будут гореть четыре различных цифры?

9.2. Найти в произвольном треугольнике ABC точку M такую, что если построить на отрезках MA, MB и MC, как на диаметрах, окружности, то длины их попарно общих хорд будут равны.

9.3. В выпуклом четырёхугольнике точки P,Q,R,S являются серединами сторон AB,BC,CD,DA соответственно, а K,L,M,N - точки пересечения отрезков AQ и DP, AQ и BR, CS и BR, CS и DP соответственно. Докажите, что площадь четырёхугольника $KLMN$ равна сумме площадей треугольников AKP, BLQ, CMR и DNS.

9.4. Сумма всех восьми чисел $a_1, a_2, \ldots, a_8$ равна $\frac{4}{3}$, а сумма любых семи из них положительна. Найти все значения, которые может принимать наименьшее из этих чисел.

9.5. Найти все натуральные n такие, что из палочек длин $1,2,\ldots,n$ (все числа от 1 до n по одному разу) можно сложить равносторонний треугольник. При этом должны быть использованы все палочки.

Всесибирская открытая олимпиада школьников по математике 2014-15 гг.

Второй этап **15 декабря 2014 г. - 25 января 2015 г.**

10 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

10.1. Площадь четырёхугольника, образованного серединами оснований и диагоналей трапеции, в четыре раза меньше, чем площадь самой трапеции. Найти отношение длин оснований трапеции.

10.2. Пусть x_1 - корень квадратного трёхчлена $y = x^2 + ax + b$, а x_2 - корень квадратного трёхчлена $y = x^2 - ax - b$, причём $x_1 \neq x_2$ и оба корня не равны нулю. Докажите, что между x_1 и x_2 обязательно лежит корень квадратного трёхчлена $y=x^2+2ax+2b$.

10.3. Сумма всех восьми чисел $a_1, a_2, ..., a_8$ равна $\frac{4}{3}$, а сумма любых семи из них положительна. Найти все значения, которые может принимать наименьшее из этих чисел.

10.4. Докажите, что в произвольном остроугольном треугольнике *ABC* существует точка *M* такая, что углы *MAB, MBC* и *MCA* равны.

10.5. Найдите все пары натуральных чисел *a* и *b* такие, что $\frac{a^2+b}{b^2-a}$ и $\frac{b^2+a}{a^2-b}$ - целые числа.

Всесибирская открытая олимпиада школьников по математике 2014-15 гг.

Второй этап **15 декабря 2014 г. - 25 января 2015 г.**

11 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

11.1. Найти все решения в натуральных числах уравнения: $x!+9=y^3$ **.**

11.2. Найти количество различных способов расстановки всех натуральных чисел от 1 до 9 включительно по одному в клетки таблицы размера 3 на 3 таких, что суммы чисел в каждой строке и каждом столбце равны. Таблицу нельзя поворачивать или отражать.

11.3. Рассмотрим все графики квадратичных функций вида $y=x^2+px+q$, пересекающие оси координат в трех различных точках. Докажите, что все окружности, описанные вокруг треугольников с вершинами в этих точках, проходят через одну общую точку.

11.4. Длины сторон пятиугольника $ABCDE$ равны 1. Пусть точки P,Q,R,S являются серединами сторон AB,BC,CD,DE соответственно, а точки K и L являются серединами отрезков PR и QS соответственно. Найти длину отрезка KL.

11.5. Докажите, что для произвольных вещественных чисел a,b,c,d,e выполняется неравенство $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2\geq a(b+c+d+e)$.