11 класс

Все задачи оцениваются из 7 баллов. Каждое верное решение, вне зависимости от длины и степени красивости, оценивается в 7 баллов

11.1. Найти все пары действительных чисел a и b, удовлетворяющих системе уравнений.

$$\begin{cases} a = \dfrac{6}{a+b}, \\ b = \dfrac{5}{3a-b}. \end{cases}$$

Ответ. $\pm(2{,}1), \pm(\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$.

Решение. Первое уравнение эквивалентно $a^2 + ab = 6$, второе: $3ab - b^2 = 5$. Вычтем второе уравнение из первого, получим $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2 = 1$, откуда $a = b \pm 1$.

1) $a = b - 1$. Подставим в первое уравнение: $2b^2 - 3b - 5 = 0, b = \frac{3\pm\sqrt{49}}{4}$=-1;$\frac{5}{2}$. Тогда $a = -2; \frac{3}{2}$. Обе пары подходят.

2) $a = b + 1$. Подставим в первое уравнение: $2b^2 + 3b - 5 = 0, b = \frac{-3\pm\sqrt{49}}{4}$=1;$-\frac{5}{2}$. Тогда $a = 2; -\frac{3}{2}$. Обе пары подходят.

Критерии проверки. (●) За каждую угаданную пару решений $\pm(2{,}1)$ и $\pm(\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$: по 1 баллу. (●) Получение соотношения $a = b \pm 1$: 3 балла. (●) Верное рассмотрение каждого из случаев $a = b - 1$ и $a = b + 1$: по 2 балла за каждый.

11.2. Доказать, что для всех положительных действительных чисел a и b выполнено неравенство: $\frac{a(a+1)}{b+1} + \frac{b(b+1)}{a+1} \geq a + b$.

Доказательство 1. Перепишем уравнение в виде: $\frac{a(a+1)}{b+1} - a + \frac{b(b+1)}{a+1} - b = \frac{a(a-b)}{b+1} +$ $+ \frac{b(b-a)}{a+1}$=$(a-b)\frac{a^2+a-b^2-b}{(a+1)(b+1)} = \frac{(a-b)^2(a+b+1)}{(a+1)(b+1)} \geq 0$. Последнее неравенство для положительных a и b очевидно, выполнено.

Доказательство 2. Без ограничения общности считаем, что $a \geq b$. Обозначим в левой части неравенства $\frac{a+1}{b+1} = x$ и рассмотрим функцию $f(x) = ax + \frac{b}{x}, x > 0$. Её минимум достигается при $x_0 = \sqrt{\frac{b}{a}} \leq 1$ и равен $2\sqrt{ab}$. При $x < x_0$ эта функция монотонно убывает, а при $x > x_0$ – монотонно возрастает. Значение этой функции равно $a + b$ при $x_1 = \frac{b}{a}$, $x_2 = 1$. Теперь заметим, что $\frac{a+1}{b+1} \geq 1$ и функция $f(x)$ на интервале $\left(\sqrt{\frac{b}{a}}, +\infty\right)$ возрастает, поэтому $\frac{a(a+1)}{b+1} + \frac{b(b+1)}{a+1} = f\left(\frac{a+1}{b+1}\right) \geq f(1) = a + b$, что и требовалось доказать.

Доказательство 3. Воспользуемся так называемым транс-неравенством. Оно в данном случае звучит так: если $x_2 \geq x_1 \geq 0$ и $y_2 \geq y_1 \geq 0$, то $x_2y_2 + x_1y_1 \geq x_2y_1 + x_1y_2$. Предлагается при проверке, если транс - неравенство правильно сформулировано, не требовать его доказательства, хотя оно выглядит тут совсем несложно: $x_2y_2 + x_1y_1 - (x_2y_1 + x_1y_2) = (x_2 - x_1)(y_2 - y_1) \geq 0$.

Без ограничения общности считаем, что $a \geq b$. Теперь положим $x_2 = a(a+1) \geq x_1 = b(b+1), y_2 = \frac{1}{b+1} \geq y_1 = \frac{1}{a+1}$, тогда $\frac{a(a+1)}{b+1} + \frac{b(b+1)}{a+1} \geq \frac{a(a+1)}{a+1} + \frac{b(b+1)}{b+1} = a + b$, что и требовалось доказать.

Критерии проверки. Для доказательства 1: (●) Первое преобразование: 1 балл. (●). Второе преобразование: 2 балла. (●) Третье преобразование: 2 балла. (●) Четвёртое преобразование: 2 балла.

Для доказательства 2: (●) Полное исследование функции $f(x) = ax + \frac{b}{x}, x > 0$: 3 балла. (●) Доказательство того, что значение этой функции равно $a + b$ при $x_1 = \frac{b}{a}$, $x_2 = 1$: 1 балл.

(●) Замечание, что $\frac{a+1}{b+1} \geq 1$ и функция $f(x)$ на интервале $\left(\sqrt{\frac{b}{a}}, +\infty\right)$ возрастает, поэтому $\frac{a(a+1)}{b+1} + \frac{b(b+1)}{a+1} = f\left(\frac{a+1}{b+1}\right) \geq f(1) = a + b$: 3 балла.

Для доказательства 3: (●) Верная формулировка транс-неравенства хотя бы для нужного здесь случая $n = 2$: 3 балла. (●) Верное и прокомментированное его использование: 4 балла.

11.3. В остроугольном треугольнике *ABC* с углом 60° при вершине *B*, обозначим за *O* центр описанной окружности, за *H* – точку пересечения высот. Прямая *OH* пересекает стороны *AB* и *BC* в точках *K* и *M* соответственно. Доказать, что треугольник *KBM* – равносторонний.

Доказательство 1. Для удобства изложения будем считать угол при вершине А меньшим углом треугольника, то есть величина угла ВАС не превосходит 60°, тогда точка О расположена левее точки Н, то есть перпендикуляр из неё на сторону АС попадает между вершиной А и основанием высоты треугольника из вершины В.

1. Заметим, что величина угла АНС равна 180-(НАС+НСА)=180°-(90°-АСВ)-(90°-ВАС)=АСВ+ВАС=180°-АВС=180°-60°=120°. Угол АОС является центральным в описанной окружности треугольника АВС, поэтому он вдвое больше соответствующего ему вписанного угла АВС=60°, значит, его величина равна 120°, то есть величине угла АНС. Следовательно, четырёхугольник АОНС является вписанным.

2. В окружности (АОНС) вписанные углы НОС и НАС, опирающиеся на общую дугу НС, равны, поэтому НОС=НАС=90°-АСВ. Теперь в треугольнике ОМС угол ОМС равен 180°-МОС-МСО=180°-НОС-ВСО=90°+АСВ-ВСО. В равнобедренном треугольнике ВОС угол при его вершине О равен удвоенному углу ВАС, поэтому угол при его основании ВСО равен 90° - ВАС. Следовательно, угол ОМС равен 90°+АСВ-ВСО=90°+АСВ-(90°- ВАС) =АСВ+ВАС=180°-АВС=180°-60°=120°. Поэтому в треугольнике КВМ угол ВМК равен 180°-ОМС=180°-120=60°. Учитывая, что, по условию угол КВМ=АВС этого треугольника уже равен 60°, он является равносторонним, что требовалось доказать.

Доказательство 2. В равнобедренном треугольнике АОС угол АОС является центральным в описанной окружности треугольника АВС, поэтому он вдвое больше соответствующего ему вписанного угла АВС=60°, значит, его величина равна 120° . Тогда угол ОАС при его основании равен 30°, следовательно, расстояние от О до стороны АС равно половине радиуса описанной окружности (АВС). Хорошо известно, что это расстояние в произвольном треугольнике равно половине длины отрезка ВН, следовательно, длина ВН равна радиусу описанной окружности (АВС), поэтому треугольник ОВН – равнобедренный и его биссектриса из вершины В является его высотой.

В равнобедренном треугольнике АОВ угол при его вершине О равен удвоенному углу ВСА, поэтому угол при его основании АВО равен 90° - ВСА. С другой стороны, в прямоугольном треугольнике, образованном высотой из В и стороной ВС, угол СВН тоже равен 90° - ВСА. Следовательно, в треугольнике КВМ его высота из В является и биссектрисой его угла КВМ. Таким образом, треугольник КВМ – равнобедренный с углом 60° при вершине, то есть равносторонний, что требовалось доказать.

Критерии проверки. Для доказательства 1: (●) Доказательство вписанности четырёхугольника АОНС: 3 балла. (●) Доказательство равенства углов НОС и НАС: 1 балл. (●) Замечено, что угол ВСО равен 90° - ВАС: 1 балл. (●) Подсчитано, что угол ОМС равен 120°: 1 балл. (●) Сделан вывод, что в треугольнике КВМ угол ВКМ равен 60° и он является равносторонним: 1 балл.

Для доказательства 2: (●) Доказательство того, что расстояние от О до стороны АС равно половине радиуса описанной окружности (АВС): 2 балла. (●) Верное использование факта о том, что это расстояние в произвольном треугольнике равно половине длины отрезка ВН: 2 балла. При этом достаточно чёткой его формулировки. (●) Доказательство того, что треугольник ОВН – равнобедренный и его биссектриса из вершины В является его высотой: 1 балл. (●) Доказательство того, что в треугольнике КВМ его высота из В является и биссектрисой его угла КВМ: 2 балла.

11.4. Найти все тройки натуральных чисел a, b, c таких, что числа $ab+1, ac+1, bc+1$ являются факториалами некоторых натуральных чисел. Числа в тройках могут совпадать. Напоминаем, что *факториалом* $n!$ натурального числа n называется произведение всех натуральных чисел от 1 до n включительно.

Ответ. Все тройки натуральных чисел, два из которых равны 1, а третье равно $n!-1$ для произвольного натурального $n \geq 2$.

Решение 1. Кроме случая, когда хотя бы два из чисел a, b, c равны 1, все числа $ab+1, ac+1, bc+1$ не меньше 3, и являются факториалами чисел, не меньших 3. Рассмотрим остатки от деления чисел a, b, c от деления на 3. Заметим, что при $n \geq 3$ остаток от деления числа $n!$ на 3 равен 0. Несложно убедиться, что для чисел вида $xy+1$ такое возможно, только если остаток одного из чисел x, y равен 1, а другого 2. Следовательно, остатки от деления a, b, c на 3 могут равняться только 1 или 2 и среди них есть равные, остаток от деления произведения которых плюс 1 равен 2, а не 0, как требуется. Значит, среди чисел a, b, c хотя бы два равны 1, а третье может быть любым вида $n!-1$ для некоторого натурального $n \geq 2$ и тогда числа $ab+1, ac+1, bc+1$ равны $2!, n!, n!$.

Решение 2. Можно считать, что числа упорядочены по возрастанию: $a \leq b \leq c$, тогда и $x! = ab+1 \leq y! = ac+1 \leq z! = bc+1$. В таком случае $ab+1$ делит $ac+1$ и $bc+1$, а $ac+1$ делит $bc+1$. Тогда $ab+1$ делит $ac+1-(ab+1) = a(c-b)$. Ввиду взаимной простоты $ab+1$ и a, отсюда следует, что $ab+1$ делит $c-b$. Аналогично, $ab+1$ делит $bc+1-(ab+1) = b(c-a)$, и, ввиду взаимной простоты $ab+1$ и b, отсюда следует, что $ab+1$ делит $c-a$. Тогда $ab+1$ делит $(c-a)-(c-b) = b-a < b < ab+1$. Последнее возможно только в случае $b-a=0$, то есть $b=a$. Подставим полученное соотношение в равенство $x! = ab+1 = a^2+1$. Если $x \geq 3$, то $x!$ делится на 3, поэтому остаток от деления a^2 на 3 должен быть равен 2, что невозможно. Следовательно, $x=2$, и $b=a=1$, а c может быть любым вида $n!-1$ для некоторого натурального $n \geq 2$.

Критерии проверки. Для решения 1: (●) Приведён только верный ответ: 1 балл. (●) Доказано, что всех троек, содержащих не больше одной единицы, числа $ab+1, ac+1, bc+1$ делятся на 3: 1 балл. (●) Доказано, что остатки от деления чисел a, b, c на 3 равны 1 или 2: 2 балла. (●) Замечено, что тогда среди этих остатков есть равные, остаток от деления произведения которых плюс 1 на 3 равен 2, а не 0, как требуется: 2 балла. (●) Отсюда сделан вывод, что среди чисел a, b, c хотя бы два равны 1, а третье может быть любым вида $n!-1$ для некоторого натурального $n \geq 2$: 1 балл.

Для решения 2: (●) Замечено, что тогда $ab+1$ делит $ac+1$ и $bc+1$, а $ac+1$ делит $bc+1$: 1 балл. (●) Доказано, что $ab+1$ делит $c-a$ и $ab+1$ делит $c-a$: по 1 баллу за каждое. Если при этом нет упоминания взаимной простоты чисел $ab+1$ и a или чисел $ab+1$ и b: снимаем 1 балл. (●) Доказано, что тогда $ab+1$ делит $(c-a)-(c-b) = b-a$ и последнее возможно только в случае $b=a$: 2 балла. (●) Доказано, что в таком случае, $x=2$, и $b=a=1$: 2 балла.

11.5. В выпуклом $n-$ угольнике проведены диагонали, разбивающие его на треугольники, и не пересекающиеся по внутренним точкам. При этом из каждой вершины выходит чётное, может быть нулевое, количество диагоналей. Доказать, что это возможно тогда и только тогда, когда n делится на 3.

Доказательство. Разбиение выпуклого многоугольника непересекающимися диагоналями на треугольники называется его *триангуляцией*. Разнообразные триангуляции многоугольников широко изучаются в элементарной математике. Из школьной программы известно, что любая триангуляция $n-$угольника содержит $n-2$ треугольника и использует $n-3$ диагонали. Эту информацию будем считать не требующей доказательства.

Сначала покажем, как осуществить требуемую в условии триангуляцию $n-$ угольника, если n делится на 3. Занумеруем вершины $n-$ угольника по часовой стрелке числами от 1 до $n=3m$. Проведём диагонали, попарно соединяющие вершины $1, 3k, 3k+2$ для всех $k=1,2,\dots,m-1$, они и образуют искомую триангуляцию. При этом из вершины номер 1 выходит $2m-2$ диагонали, из вершин $3k, 3k+2$ для всех $k=1,2,\dots,m-1$ по 2 диагонали, и из вершин $2, 3m$ и $3k+1$ для всех $k=1,2,\dots,m-1$ - 0 диагоналей.

Теперь докажем, что, если можно осуществить требуемую в условии триангуляцию $n-$ угольника, то n делится на 3.

Доказательство 1 проведём индукцией по n. Триангуляцию из условия будем дальше называть *хорошей*.

Базой индукции служат случаи $n=3,4,5,6$. При $n=3$ сам треугольник является своей хорошей триангуляцией с 0 диагоналями. В случаях $n=4,5$ есть ровно по одной триангуляции с 1 или 2 диагоналями соответственно, и они, очевидно, не являются хорошими. При $n=6$ имеются 3 разных триангуляции, одна из которых хорошая, при которой 3 диагонали соединяют попарно три вершины, расположенных через одну, скажем, номер 1, 3 и 5. Таким образом, база индукции доказана.

Шаг индукции. Пусть в $n \geq 7-$ угольнике можно сделать хорошую триангуляцию, а предположение индукции верно для всех $m-$ угольников, где $m<n$. Докажем, что n делится на 3.

Назовём диагональ $n-$ угольника *длинной*, если по обе стороны от неё лежат по две или больше его вершин. Докажем, что любая триангуляция $n-$ угольника при $n \geq 7$ содержит хотя бы одну длинную диагональ. Если это не так, то любая диагональ триангуляции отсекает от $n-$угольника треугольник, образованный ей и двумя соседними сторонами многоугольника, причём эти пары сторон у различных диагоналей не содержат общих сторон. Следовательно, количество диагоналей в триангуляции не превосходит $\frac{n}{2}$, а оно, как мы знаем, равно $n-3$. Тогда $n-3 \leq \frac{n}{2}$, откуда $n \leq 6$, что противоречит рассматриваемому случаю $n \geq 7$. Таким образом, любая триангуляция $n-$ угольника при $n \geq 7$ содержит хотя бы одну длинную диагональ.

Решающий шаг. Рассмотрим хорошую триангуляцию $n-$угольника при $n \geq 7$ и её длинную диагональ XY, разбивающую его на два многоугольника A и B, в каждом из которых не менее 4, и не более $n-2$ вершин. Диагонали исходной хорошей триангуляции $n-$угольника (дальше просто *диагонали*), кроме XY, образуют триангуляции многоугольников A и B, причём, как мы сейчас покажем, одна из них сразу является хорошей, а другую несложно таковой сделать.

Обозначим за X_A и X_B множества диагоналей триангуляции, выходящих из вершины X, и попавших в многоугольники A и B соответственно, аналогично Y_A и Y_B– для диагоналей из Y. В каждой из этих пар множеств одно содержит чётное число диагоналей, а другое – нечётное. Из того, что общие количества концов диагоналей триангуляции, попавших в A, и попавших в B чётны, и количества концов диагоналей триангуляции, выходящих изо всех вершин, кроме X и Y, чётны, следует, что чётны числа $|X_A|+|Y_A|$ и $|X_B|+|Y_B|$. Значит, в одной из пар $|X_A|, |Y_A|$ и $|X_B|, |Y_B|$ оба числа чётны, а в другой – оба нечётны. Следовательно, в одном из многоугольников, скажем в A, оставшиеся там диагонали исходной триангуляции образуют хорошую триангуляцию, а в другом - а именно в B, вершинам X и Y инцидентны нечётные количества оставшихся диагоналей исходной триангуляции, а всем остальным – чётное. Теперь добавим к многоугольнику B ещё одну новую вершину, располагающуюся между X и Y, получив новый многоугольник C. В полученном многоугольнике оставшиеся диагонали исходной триангуляции, включая XY, образуют хорошую триангуляцию, а число его вершин не превосходит $n-2+1=n-1$. По предположению индукции, количества a и c вершин в каждом из многоугольников A и C соответственно, делятся на 3. Следовательно, и количество вершин в исходном $n-$ угольнике, равное a+c $-$ 3, тоже делится на 3. Тройка вычитается, так как вершины X и Y в сумме a+c учитываются дважды, и ещё нужно удалить добавленную к многоугольнику B новую вершину, не содержащуюся в исходном $n-$ угольнике.

Доказательство 1a. Обобщение идеи доказательства 1, тоже индукционное. Возьмём произвольную вершину A многоугольника, из которой выходят не менее двух диагоналей, пусть эти диагонали соединяют A с вершинами $A_1, \dots, A_k, k = 2m \geq 2$. Они разбивают исходный многоугольник на $k+1$ – нечётное число частей, каждая из которых является триангулированным оставшимися диагоналями многоугольники с меньшим, чем n, числом вершин. Рассуждая, как в решении 1, получим, что триангуляции первой, третьей, пятой,…, $k+1$ – ой из них (слева направо) уже являются хорошими, а во второй, четвёртой,…, k - ой частях из вершин A_{2i-1} и $A_{2i}, i = 1, \dots, m$ соответственно, выходит нечётное количество диагоналей. Эти части не могут быть просто треугольниками $AA_{2i-1}A_{2i}$, вообще не содержащими внутри диагоналей, поэтому в каждой из них должна содержаться диагональ $A_{2i-1}A_{2i}$. В таком случае многоугольник, получающийся из каждой такой части удалением треугольника $AA_{2i-1}A_{2i}$, уже будет хорошо триангулирован. Применяем ко всем полученным частям предположение индукции, получим, что число вершин в каждой из них делится на 3. В сумме S количеств вершин во всех этих частях, включая треугольники вида $AA_{2i-1}A_{2i}$, вершины $A_1, \dots, A_k, k = 2m \geq 2$ содержатся по 3 раза, а вершина A - $k+1 = 2m$+1 раз. Следовательно, S превышает количество n вершин в исходном многоугольнике на $2 \cdot 2m + 2m = 6m$. Очевидно, что S делится на 3, поэтому и n делится на 3, что и требовалось доказать.

Доказательство 2. Рассмотрим хорошую триангуляцию $n-$угольника. Хорошо известно, что её треугольники можно раскрасить в 2 цвета, белый и чёрный, так, что любые два треугольника, имеющих общую сторону, окрашены в разные цвета. Этот факт легко доказать индукцией по числу диагоналей, начав с монотонной окраски всего многоугольника, добавляя по одной диагонали и меняя каждый раз окраску всех частей многоугольника с одной из сторон от добавляемой диагонали на противоположный цвет.

Заметим, что, если из каждой вершины $n-$угольника выходит чётное число диагоналей, то каждая его сторона является стороной треугольников одного, скажем чёрного, цвета. Тогда каждая диагональ триангуляции и каждая сторона $n-$угольника являются сторонами в точности одного из чёрных треугольников. Если чёрных треугольников k штук, то $3k = n-3+n = 2n-3$, откуда следует, что $2n-3$ делится на 3. Отсюда легко следует, что и n делится на 3.

Доказательство 3. Рассмотрим наш триангулированный хорошим образом $n-$ угольник как граф, вершины которого – это вершины $n-$ угольника, а рёбра - стороны и диагонали $n-$ угольника.

Осознаем, что вершины графа можно правильно окрасить в 3 цвета – так, чтобы вершины одного цвета не были соединены ребром. Проще всего это сделать по индукции. Найдём самую короткую диагональ AB триангуляции, она отсекает от $n-$угольника треугольник, две стороны которого являются сторонами $n-$ угольника с общей вершиной C. Если бы это было не так, то меньшая из двух частей, на которые рассекает $n-$ угольник диагональ AB, содержала бы непроведённую диагональ труангуляции. По индукции, вершины всего $n-$угольника без треугольника ABC правильно красятся в 3 цвета. Осталось окрасить вершину C в цвет, отличный от цветов вершин A и B.

Докажем, из условия следует, что вершины $n-$ угольника правильно окрашены в три цвета в циклическом порядке: 1, 2, 3, 1, 2, 3, …. Действительно рассмотрим идущие по часовой стрелке последовательные соседние вершины $n-$угольника A, B и C, и все диагонали триангуляции $BA_1, BA_2, \dots BA_k$, выходящие из вершины B в их естественном порядке следования от стороны BA к стороне BC. Считаем A и B окрашенными в цвета 1 и 2 соответственно. Среди отрезков $BA, BA_1, BA_2, \dots, BA_k, BC$ любые два соседних являются двумя сторонами некоторого треугольника триангуляции, вершины которого окрашены в три различных цвета, поэтому вторые концы диагоналей $BA_1, BA_2, \dots BA_k$, окрашены по порядку в чередующиеся цвета 3 и 1, причём последняя из них, ввиду чётности их количества, окрашена в 1 цвет. Следовательно, вершина $n-$ угольника C, следующая за B, окрашена в цвет 3. Аналогично доказывается, что за вершиной C цвета 3 следует вершина цвета 1 и т. д. Поскольку окраска правильная, замкнуться цикл по вершинам может тогда и только тогда, когда его длина n делится на 3.

Критерии проверки. Общие. Если в решении чётко формулируется, что любая триангуляция содержит $n-3$ диагонали и $n-2$ треугольника, то, независимо, доказано это, или нет – ставится 1 балл, если при этом **не** доказано, что хорошая триангуляция возможна только при n, делящемся на 3. Если это доказано, то балл к 5 баллам за этот пункт не плюсуется. К 2 баллам за построение примера хорошей триангуляции для всех n, делящихся на 3, этот балл плюсуется.

В доказательстве 1: (●) Построен с обоснованием пример хорошей триангуляции выпуклого $n-$угольника для любого n, делящегося на 3: 2 балла. (●) Доказано существование длинной диагонали XY в любой триангуляции: 1 балл. (●) Доказано, что в одном из многоугольников A и B индуцированное разбиение уже хорошее, а в другом есть всего две соседних нечётных вершины X и Y: 2 балла. (●) Придумано, как добавлением вершины сделать триангуляцию B хорошей: 1 балл. (●) К хорошим триангуляциям A и B применено предположение индукции и доказана делимость n на 3: 1 балл.

В доказательстве 2: (●) Построен пример хорошей триангуляции выпуклого $n-$ угольника для любого n, делящегося на 3: 2 балла. (●) Сделана (1 балл) и обоснована (ещё 1 балл) правильная окраска треугольников произвольной триангуляции в 2 цвета: итого 2 балла. (●) Понято, что для хороших триангуляций каждая диагональ триангуляции и каждая сторона $n-$ угольника являются сторонами в точности одного из чёрных треугольников: 2 балла. (●) Доказано, что $2n-3$ делится на 3, и что n делится на 3: 1 балл.

В доказательстве 3: (●) Построен пример хорошей триангуляции выпуклого $n-$ угольника для любого n, делящегося на 3: 2 балла. (●) Доказано, что вершины графа правильно красятся в 3 цвета: 2 балла. (●) Доказано, что вершины графа, как $n-$ угольника, циклически окрашены в 3 цвета: 3 балла.