Решения и критерии проверки задач второго этапа Всесибирской олимпиады школьников 2020-2021 гг. по математике 9 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

9.1. Пусть $a<b<c<d$ - действительные числа. Расположить в порядке возрастания суммы $ab+cd, ac+bd, ad+bc$.

Ответ. $ad+bc, ac+bd, ab+cd$.

Решение. Разность первого и второго чисел из условия равна $ab+cd-(ac+bd)=d(c-b)+a(b-c)=(d-a)(c-b)>0$. Аналогично, разность второго и третьего чисел из условия равна $ac+bd-(ad+bc)=b(d-c)+a(c-d)=(b-a)(d-c)>0$. Следовательно, в условии эти числа расставлены в порядке убывания и в ответе этот порядок нужно поменять на обратный.

Критерии проверки. Обоснованно упорядочена только одна пара чисел: 3 балла.

Не написано, что числа, на которые отличаются a,b,c,d - положительные числа, ведь только тогда можно утверждать, что одна сумма больше другой.	Минус 1 балл.
Ничего не написано про знаки разностей исходных чисел (иначе при сокращении на них знак меняется).	Минус 1 балл.
В решении использовано транснеравенство, но оно не является общеизвестным фактом (частью школьной программы), поэтому как минимум должно быть сформулировано.	За отсутствие формулировки минус 2 балла
Только ответ. Рассмотрены частные случаи.	Минус 1 балл.

9.2. Ненулевые действительные числа x, y удовлетворяют равенству $2x^2+2y^2=5xy$. Найти все возможные значения выражения $\frac{x+y}{x-y}$.

Ответ. 3 и -3.

Решение. Прибавим к обеим частям равенства в условии $4xy$, получим $2x^2+4xy+2y^2=2(x+y)^2=9xy$, откуда $x+y=\pm\frac{3}{\sqrt{2}}\sqrt{xy}$. Аналогично, вычтем из обеих частей равенства в условии $4xy$, получим $2x^2-4xy+2y^2=2(x-y)^2=xy$, откуда $x-y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{xy}$. При этом знаки в двух случаях не обязаны быть согласованными. Следовательно, отношение $\frac{x+y}{x-y}$ может принимать одно из двух значений 3 и –3. Проверим, достигаются ли они в действительности. Решаем систему $\begin{cases} x+y=\dfrac{3}{\sqrt{2}}, \\ x-y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases}$, находим $x=\sqrt{2}, y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, для них $2x^2+2y^2=4+1=5=5\sqrt{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}=5xy$ - числа удовлетворяют условию задачи. Следовательно. число 3 является ответом задачи. Аналогично, решаем систему $\begin{cases} x+y=\dfrac{3}{\sqrt{2}}, \\ x-y=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases}$, находим $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}, y=\sqrt{2}$, для них $2x^2+2y^2=1+4=5=5\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2}=5xy$ - числа удовлетворяют условию задачи. Следовательно, число -3 тоже является ответом задачи.

Критерии проверки. Ответы и примеры x, y, когда они достигаются: 2 балла. Доказательство, что других ответов нет: 5 баллов.

Доказательство, в котором получено, что x=2y или 2x=y	7 баллов
Доказательство, из которого не очевидно, что указанные значения реализуются, без примеров	5 баллов
Упущено одно из значений (3 или -3)	Минус 2 балла
Только примеры на 3 и -3	Минус 2 балла
Только пример на 3 или -3	Минус 1 балл

9.3. В выпуклом четырёхугольнике ABCD равны радиусы окружностей, вписанных во все треугольники ABC, BCD, CDA и DAB. Доказать, что диагонали AC и BD этого четырёхугольника равны.

Доказательство. Обозначим через r радиус окружностей, вписанных в треугольники ABC, BCD, CDA и DAB, и подсчитаем площадь S четырёхугольника двумя способами, первым - как сумму площадей треугольников ABC и CDA, и вторым – как сумму площадей треугольников BCD и DAB. В первом случае $S=\frac{1}{2}r(AB+BC+AC)+\frac{1}{2}r(AD+CD+AC)=\frac{1}{2}r(AB+BC+CD+AD)+r\cdot AC$. Во втором случае $S=\frac{1}{2}r(AB+BD+AD)+\frac{1}{2}r(BC+CD+BD)=\frac{1}{2}r(AB+BC+CD+AD)+r\cdot BD$. Из равенства крайних выражений в обоих случаях получаем $AC=BD$, что и требовалось доказать.

Критерии проверки.

Не доказано, что точка D - является точкой пересечения диагоналей достроенного параллелограмма	3 балла

9.4. Найти все тройки простых чисел p,q,r таких, что числа $|q-p|,|r-q|,|r-p|$ тоже простые.

Ответ. 2,5,7.

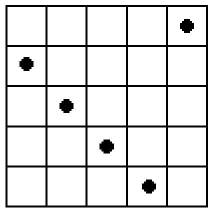
Решение. Можно считать, что $p<q<r$. Если $p>2$, то все числа p,q,r нечётные, а их разности $|q-p|,|r-q|,|r-p|$ - чётны. Тогда $|r-p|=r-p=r-q+q-r\geq 2+2=4$ не может быть простым числом, что противоречит условию задачи. Следовательно, $p=2$.

Тогда q и r нечётные простые числа, их разность $r-q$- чётное простое число, значит $r-q=2$, то есть $r=q+2$. В таком случае $q-p=q-2,q,q+2$ - три последовательных нечётных числа, следовательно, одно из них должно делиться на 3 (рассмотрение остатков от деления q на 3). Последнее возможно только при $q-2=3$, то есть $q=5,r=7$.

Критерии проверки. Только **о**тветы: 2 балла. Доказательство, что других ответов нет: 5 баллов.

Только пример без доказательства того, что других вариантов нет (даже если есть лишние ответы)	2 балла
Показано, что искомая тройка получается из трёх последовательных нечётных чисел, являющихся простыми, и получен ответ (без обоснования единственности)	3 балла

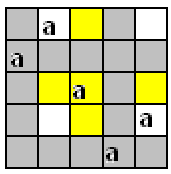
9.5. В каждой клетке таблицы 5×5 записано одно из чисел 1,2,3,4,5 таким образом, что в каждой строке, каждом столбце и каждой из двух диагоналей таблицы встречается каждое из чисел от 1 до 5. Какое максимальное значение может принимать сумма пяти чисел, записанных в клетках, отмеченных на рисунке точками?



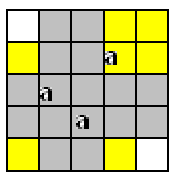
Ответ. 22.

Решение. Если все 4 числа, отмеченные точкой и не стоящие в правом верхнем углу, различны, то сумма всех чисел, отмеченных точкой, не превосходит 5+5+4+3+2=19. Пусть далее среди этих чисел есть два равных, рассмотрим три возможных варианта их расположения. Обозначим вертикали таблицы слева направо буквами a,b,c,d,e, а горизонтали – цифрами от 1 до 5. Диагональ из угла *a1* в угол *e5* назовём главной, а диагональ из угла *a5* в угол *e1* назовём побочной. Пару рассматриваемых равных чисел обозначим за *a*.

1) Равны числа в клетках *a4* и *d1*. Оставшиеся числа, равные *a*, не могут располагаться в 1-ой и 4-ой горизонталях и в вертикалях *a* и *d*, поэтому на побочной диагонали *a* может стоять только в клетке *c3*. Два оставшихся числа *a* могут располагаться только в клетках *b5* и *e2*.

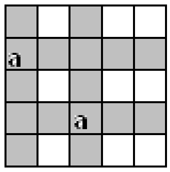


2) Равны числа в клетках *b3* и *c2*.. Оставшиеся числа, равные *a*, не могут располагаться во 2-ой и 3-ей горизонталях и в вертикалях *b* и *c*, поэтому на диагоналях число *a* может стоять только в угловых клетках и клетке *d4*.

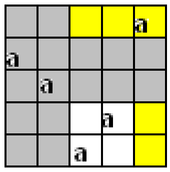


Угловые клетки не могут содержать два равных числа, так как любая пара угловых клеток лежит либо в одной горизонтали, вертикали или диагонали, поэтому одно *a* стоит в клетке *d4*. Оно исключает клетки главной диагонали, горизонтали 4 и вертикали *d4*, поэтому два оставшихся числа *a* могут располагаться только в клетках *a5* и *e1* побочной диагонали, чего не может быть.

3) Равны числа в клетках *a4* и *c2*.. Оставшиеся числа, равные *a*, не могут располагаться в 2-ой и 4-ой горизонталях и в вертикалях *a* и *c*, поэтому на диагоналях числа *a* могут располагаться только в угловых клетках *e1* и e5. лежащих в одной вертикали, что невозможно.



4) Равны числа в клетках *a4* и b3.. Оставшиеся числа, равные *a*, не могут располагаться в 3-ей и 4-ой горизонталях и в вертикалях *a* и *b*, а на главной диагонали число *a* должно стоять в клетке *e5*. Тогда на побочной диагонали оно стоит в клетке *d2*, а на первой горизонтали – в клетке *c1*.



Проведённый анализ показывает, что трёх одинаковых чисел или двух пар равных чисел среди 4 чисел, отмеченных точкой и не стоящих в правом верхнем углу, быть не может потому, что допустимые конфигурации случаев 1) и 4) не могут встретиться одновременно. Следовательно, сумма этих четырёх чисел не превосходит 5+5+4+3=17. а сумма пяти чисел, отмеченных точками, не больше 17+5=22. Оценка сверху получена.

Пример расстановки чисел, удовлетворяющих условию с суммой, равной 22:

3	4	1	2	5
5	1	3	4	2
4	5	2	1	3
2	3	4	5	1
1	2	5	3	4

Критерии проверки. Любая попытка доказательства неверного ответа: 0 баллов.

Верный ответ с примером: 3 балла. Доказательство максимальности суммы 22: 4 балла. Если перебор в доказательстве неполный: снижаем баллы пропорционально.