Всесибирская открытая
олимпиада школьников по астрономии

Дистанционный отборочный этап

7-8 классы

1. Предположим, что границы пояса Койпера находятся в орбитальном резонансе с периодом Нептуна 2:3 и 1:2, а толщина пояса ограничена наклонением орбиты Плутона к эклиптике. Считая, что в поясе Койпера около 70000 объектов с диаметром 100 км и более, рассчитайте среднее расстояние между соседними такими объектами. Ответ дайте в километрах с разумной точностью.

Решение.

Из условий про орбитальные резонансы найдём радиусы границ пояса Койпера. Внутренняя граница будет соответствовать периоду обращения $T_{in} = 3/2\ T_{Н}$, внешняя – $T_{ex} = 2\ T_{Н}$. Из третьего закона Кеплера ($T^2 = R^3$) получаем радиусы границ: R_{in} = 55 а.е., R_{ex} = 85 а.е.

Толщина пояса Койпера определяется максимальной «высотой» Плутона над плоскостью эклиптики. Эту высоту можно оценить как $H = Ra \cdot \sin i$, где Ra = 49 а.е. – афелийное (максимальное) расстояние Плутона от Солнца, i = 17° – угол наклонения орбиты Плутона. Получаем H = 14.3 а.е.

В итоге получается, что пояс Койпера представляет собой что-то вроде тора (бублика) с радиусом центральной образующей около 70 а.е. и внутренним радиусом 14-15 а.е.

Объём такой фигуры вычисляется как $V = 2\pi R_{ц} \cdot \pi R_{внутр}^2 = 3{,}1 \cdot 10^5$ а.е.^{3}. Считая, что 70000 объектов расположены там более-менее равномерно, получаем, что каждый объект занимает элемент объёма $3{,}1 \cdot 10^5 / 70000 = 4{,}44$ а.е.^{3}. Для оценки расстояния между объектами примем, что этот объём представляет собой куб – тогда расстояние равно длине ребра этого куба.

$d_{ср} = (4{,}44$ а.е.$^3)^{1/3}$ = **1.64 а.е**.

Несмотря на большое количество объектов, из-за колоссального объёма пространства, занимаемого ими, среднее расстояние между «соседями» превышает расстояние от Солнца до Марса.

---

2. Используя результаты предыдущей задачи, рассчитайте, телескоп с какой апертурой надо использовать на одном из объектов пояса Койпера (диаметр 100 км), чтобы с него разглядеть другой такой же соседний как диск, а не точку. Считайте, что освещенность наблюдаемого объекта достаточна, а телескоп равнозрачковый.

Решение.

Для того, чтобы разглядеть объект в виде диска, нужно, чтобы его угловой размер, увеличенный телескопом, составил как минимум одну угловую минуту ($1' = 1°/60 = 2{,}9 \cdot 10^{-4}$ рад).

Угловой размер объекта равен его линейному размеру, делённому на расстояние до него, то есть α = 100 км / 1.64 а.е. = $4 \cdot 10^{-7}$ рад = $8 \cdot 10^{-2}$ угловых секунд.

Таким образом, для увеличения этого размера до 1′ = 60" нам нужен телескоп с угловым коэффициентом увеличения $Г = 60 / 8 \cdot 10^{-2} = 750$. Угловое увеличение телескопа равно отношению фокусных расстояний объектива и окуляра или (в телескопах без диафрагмирования) отношению диаметров входного и выходного отверстия (D/d).

Поскольку по условию телескоп равнозрачковый, диаметр выходного отверстия (окуляра) можно принять равным диаметру человеческого зрачка в темноте (6 мм).

Тогда D = 6 мм · 750 = 4500 мм = **4,5 м**. Большой, но вполне возможный для постройки телескоп.

---

3. Сколько «фиолетовых» фотонов понадобится, чтобы расплавить и испарить килограмм льда?

Решение.

Определим энергию, нужную для расплавления, нагрева до 100° и испарения 1 кг льда пир начальной температуре 0°.

$E = m\,(\lambda_{пл} + c\,(T - T0) + \lambda_{пар}) = 1$ кг $\cdot$ ($3{,}3 \cdot 10^5$ Дж/кг + 4200 Дж/кг/К · 100 К + $2{,}26 \cdot 10^6$ Дж/кг) = $3{,}0 \cdot 10^6$ Дж.

«Фиолетовый» фотон имеет длину волны около 400 нм и энергию $E = hc / \lambda = 5 \cdot 10^{-19}$ Дж.

Таким образом, для указанных операций с килограммом льда нам потребуется $3{,}0 \cdot 10^6 / 5 \cdot 10^{-19}$ = **$6 \cdot 10^{24}$ фотонов**.

---

4. Сколько длится «день» на северном полюсе Луны?

Решение.

Как известно, Луна обращается вокруг Земли «синхронно» – период её орбитального движения совпадает с периодом вращения вокруг собственной оси. С другой стороны, продолжительность полярного дня на северном и южном полюсах Земли не связана с суточным вращением планеты, а связана только с наклоном оси Земли к плоскости её орбиты и с орбитальным вращением.

Как и у Земли, ось вращения Луны наклонена к плоскости эклиптики, поэтому на полюсах Луны полярный день сменяется полярной ночью. Период смены также связан с обращением Луны (вместе с Землёй) <u>вокруг Солнца</u>, так что полярный день на лунном полюсе будет длиться **около половины <u>года</u>** (не месяца!).

Более тонкие эффекты могут слегка изменить этот оценочный расчёт, но их учёт не входит в рамки данной задачи.

---

5. Наблюдатель на Земле в новогоднюю ночь наблюдает Марс в восточной квадратуре. В каком созвездии в этот момент находится Земля для наблюдателя на Марсе?

Решение.

Восточная квадратура (см. рис.) означает, что угловое расстояние на небе от планеты до Солнца (угол элонгации, разница эклиптических долгот) равен 90°. То есть Марс мы с Земли видим на фоне «левого» созвездия, где мы увидим Солнце через ¼ года. Напоминаем, что планеты на рисунке обращаются вокруг Солнца против часовой стрелки.

Наблюдатель на Марсе, наоборот, видит Землю на фоне «правого» созвездия, где Солнце было ¼ оборота назад.

За три месяца до новогодней ночи было начало октября, и Солнце было в созвездии Девы. Там же и будет в земную новогоднюю ночь Земля с точки зрения марсианских астрономов.

---

6. Однажды Меркурий закрыл для земного наблюдателя диск Венеры (полностью или частично). Меркурий в это время находился на максимально возможном, с точки зрения земного наблюдателя, удалении от Солнца. Какую долю диска Венеры закрыл Меркурий? Орбиты Венеры и Земли считайте круговыми.
7. Если считать, что событие, описываемое в задаче №6, произошло 10 июня, в каких созвездиях находилось в это время Солнце с точки зрения наблюдателей на Меркурии и Венере? Считайте, что орбиты Меркурия и Венеры лежат в плоскости эклиптики.
8. Используя условие задачи №6, найдите фазы Меркурия и Венеры в описываемый момент времени.

Решение задач 6 – 8.

Из условия следует, что Меркурий находится, во-первых, в максимуме элонгации, а во-вторых, в афелии своей орбиты. Тогда расстояние от Земли до Меркурия по теореме Пифагора равно $(1^2 - 0{,}47^2)^{0{,}5}$ = 0,88 а.е. Фаза планеты в максимуме элонгации всегда равна **<u>0,5</u>** (Солнце освещает половину видимого диска). Угловое расстояние Меркурия от Солнца (угол элонгации) равно arcsin 0.47 = 28°.

Поскольку Меркурий закрыл Венеру, она находится в этой же точке земного неба, на таком же угловом расстоянии от Солнца. Но для неё это, конечно, не максимум элонгации.

Из треугольника Солнце – Земля – Венера мы можем найти расстояние от Земли до Венеры (по теореме косинусов, из двух прямоугольных треугольников либо просто из правильных масштабных построений на листе бумаги). Отмечаем, что при использовании теоремы косинусов у нас получается два решения для расстояния от Земли до Венеры – и действительно, «луч зрения», соединяющий Землю и Меркурий, пересекает орбиту Венеры дважды. Нам нужно выбрать «дальний» от Земли вариант.

В любом случае, расстояние от Земли до Венеры получается равным 1,42 а.е.

Сравниваем угловые размеры Венеры и Меркурия для земного наблюдателя. Угловой диаметр Венеры в радианах равен отношению диаметра планеты к расстоянию до неё:

$d_В = 2 \cdot 6052$ км / 1.42 а.е. = $5{,}7 \cdot 10^{-5}$ рад = 11,72 ".

Угловой размер Меркурия, аналогично, равен

$d_М = 2 \cdot 2440$ км / 0.88 а.е. = $3{,}7 \cdot 10^{-5}$ рад = 7,63 ".

Доля закрытой Меркурием площади Венеры равна отношению квадратов их угловых размеров: $d_М^2 / d_В^2$ = **0,42 = 42%**.

Фазу Меркурия мы уже определили, она равна 50 %. Для вычисления фазы Венеры вычислим фазовый угол «Солнце – Венера – Земля». Он легко определяется из соответствующего прямоугольного треугольника и равен φ = arcsin 0,47/0,72 = 41°. Тогда фаза Венеры равна (1 + cos φ)/2 = **0.88**.

Для определения созвездий, на фоне которых видно Солнце для меркурианского и венерианского наблюдателя, заметим сначала, что луч «Земля – Солнце» 10 июня указывает в созвездие Тельца. Луч «Меркурий – Солнце» составляет с лучом «Земля – Солнце» угол 90° – 28° = 62°, то есть с Меркурия Солнце видно в том созвездии, в котором оно будет на небе Земли примерно через 62/360·365 = 63 дня от 10 июня, то есть 12 августа. Это **созвездие Льва**.

Аналогично, луч «Венера – Солнце» составляет с лучом «Земля – Солнце» угол 111°, и Солнце с Венеры будет видно **в созвездии Девы** (112 дней от 10 июня = 30 сентября).

---

9. В каком месяце звезда Фомальгаут может наблюдаться в Новосибирске в полночь по местному (поясному) времени? На какой высоте над горизонтом?

Решение.

Фомальгаут (α Южной Рыбы) – южная звезда со склонением –29,5°. Для начала проверим, наблюдается ли она вообще в Новосибирске (широта +55°).

Высота верхней кульминации вычисляется по формуле $h_+ = 90° – θ + δ$ (θ – широта, δ – склонение). Для Фомальгаута получаем **h_+ = +5,5°,** то есть в принципе в нужное время года и суток звезду можно наблюдать, хоть и низко над горизонтом.

Поскольку высота очень небольшая, будем считать, что мы наблюдаем Фомальгаут именно в верхней кульминации. Это возможно, когда момент верхней кульминации близок к местной (поясной) полуночи. Осталось понять, в какой месяц это происходит.

Новосибирск находится в часовом поясе GMT+7 и на долготе +83°. Разница между поясным временем и местным солнечным временем составляет 7 – 83/15 = 1,5 часа, то есть местная полночь соответствует примерно 01:30 солнечного времени.

Звезда Фомальгаут имеет прямое восхождение около 23^h, то есть кульминирует около 23:00 по местному звёздному времени. Звёздное время совпадает с солнечным в день осеннего равноденствия, а потом начинает «убегать» вперёд примерно на 4 минуты за сутки. Нам же надо, наоборот, отступить от солнечного времени примерно 2,5 часа «назад».

Разницу в 2,5 часа мы получаем примерно за 2,5·60/4 = 37,5 суток, то есть нужный нам момент наступает чуть больше, чем за месяц до осеннего равноденствия, или **в середине августа**.

К слову, именно в этот период в Новосибирске обычно проводится выездная Летняя астрономическая школа. Правда, Фомальгаут на ней пронаблюдать не получилось, южный горизонт на астроплощадке был, увы, закрыт деревьями до высоты около 15°.

Всесибирская открытая олимпиада школьников по астрономии

Дистанционный отборочный этап

9 класс

1. Высота экваториальной орбиты спутника 1000 км. Сколько времени в идеале мы можем наблюдать спутник с Земли, если он пролетает через зенит?

Решение

Поскольку спутник на экваториальной орбите и пролетает через зенит, то наблюдатель находится на экваторе Земли. Максимально возможное время наблюдения соответствует ситуации, когда спутник движется по направлению суточного вращения Земли, и мы видим как момент его восхода, так и момент его захода под горизонт.

Период вращения спутника на круговой орбите радиусом 6371 + 1000 = 7371 км можно вычислить напрямую из длины окружности орбиты и первой космической скорости на этой высоте, либо из третьего закона Кеплера, сравнив спутник, например, с Луной. В любом случае, период получается равным около 6300 секунд. Геоцентрическая угловая скорость спутника, таким образом, равна $\omega_0 = 2\pi / 6300 = 10^{-3}$ рад/с.

Наблюдатель на поверхности Земли вращается вместе с Землёй с угловой скоростью $\omega_З = 2\pi / 86400 = 7{,}3 \cdot 10^{-5}$ рад/с, поэтому относительная геоцентрическая скорость спутника и наблюдателя будет равна $\omega_1 = 10^{-3} – 7{,}3 \cdot 10^{-5} = 9{,}3 \cdot 10^{-4}$ рад/с.

Во вращающейся геоцентрической системе отсчёта спутник с относительной угловой скоростью от точки восхода до точки захода должен пройти угол $\alpha = 2 \arccos R_З / (R_З+h) = 1.05$ рад. Время пролёта, таким образом, составит $1.05 / 9{,}3 \cdot 10^{-4}$ = **1130 сек = 18.8 мин.**

---

2. Однажды Меркурий закрыл для земного наблюдателя диск Венеры (полностью или частично). Меркурий в это время находился на максимально возможном, с точки зрения земного наблюдателя, удалении от Солнца. Какую долю диска Венеры закрыл Меркурий? Орбиты Венеры и Земли считайте круговыми.
3. Если считать, что событие, описываемое в задаче №2, произошло 10 июня, в каких созвездиях находилось в это время Солнце с точки зрения наблюдателей на Меркурии и Венере? Считайте, что орбиты Меркурия и Венеры лежат в плоскости эклиптики.
4. Используя условие задачи №2, найдите фазы Меркурия и Венеры в описываемый момент времени.

Решение задач 2-4 приведено в разделе «7-8 класс», задачи 6-8.

---

5. На какой широте, перемещаясь на 1 м в сторону, мы меняем местное солнечное время на 1 час? В какую сторону нужно перемещаться для наиболее «эффективного» изменения местного солнечного времени?

Решение.

Если шагать на 1 метр по прямой, то к наибольшему изменению солнечного времени приведёт **сдвиг вдоль параллели** на запад (если мы хотим «замедлить» ход солнечных часов) или на восток (если хотим «ускорить» солнечное время).

Для изменения местного солнечного времени на 1 час нужно сдвинуться на 1/24 длины окружности соответствующей параллели (считаем, что сдвигаемся мы мгновенно). Таким образом, вопрос задачи сводится к нахождению широты, длина окружности параллели которой равна 24 метрам. Понятно, что такая параллель будет крайне близка к северному или южному полюсу Земли.

Длина окружности параллели равна $2\pi R_З \cos\varphi$, поэтому широта равна $\varphi = \arccos$ (24 м / 40000 км) = 89.999965°. Это чуть меньше 4 метров от географического полюса :)

---

6. Рассчитайте равновесную температуру тела на поверхности Земли, если известно, что оно полностью поглощает лишь видимое излучение.

Решение.

Тело, находящееся в термодинамическом равновесии, должно излучать ровно такой же суммарный поток энергии, как получает от Солнца.

Поскольку форма тела в условии задачи не задана, участники олимпиады могут предполагать любую разумную форму поверхности (плоский лист, куб с освещённой Солнцем гранью, шар и т.д.). Для простоты предположим, что тело представляет собой плоский лист материала площадью 1 м^2, лежащий перпендикулярно солнечным лучам.

Плотность потока солнечной энергии на земную поверхность в видимых лучах составляет около 600 Вт / м^2. Полный поток поглощаемой энергии, таким образом, для нашего тела равен 600 Вт.

Нагретое тело, по закону Стефана-Больцмана, излучает с 1 м^2 своей поверхности поток энергии, равный σT^4. Отметим, что излучающих поверхностей у нашего тела две, то есть площадь излучения в два раза больше площади поглощения энергии.

Имеем: $2\,\sigma T^4$ = 600 Вт/м^2. Отсюда температура тела **T = 270 К**. Достаточно холодное.

---

7. Сколько времени длится на МКС «ночь», если станция находится на высоте 420 км над поверхностью Земли и движется в плоскости экватора?

Решение

На МКС наступает «ночь», когда она попадает в конус земной тени и с борта станции не видно Солнце. В этот же момент, кстати, мы не видим станцию при наблюдении с Земли, даже если она находится над горизонтом.

Угол раствора конуса земной тени примерно равен видимому угловому диаметру Солнца – 0,5°. Центральный угол дуги, которую проходит станция в ночной части своей орбиты, может быть определен из уравнения: $\beta/2 = 90° - \alpha/2 - \arccos(R / (R+h)) = 69.5°$, то есть весь угол $\beta = 139°$.

Соответственно, прохождение этого центрального угла занимает 139/360 = 0,39 от периода обращения МКС, то есть **около 36 минут**.

---

8. Сколько солнечной энергии в секунду собирает параболическое зеркало, расположенное на орбите около Земли, если от фокуса до основания параболы 2 м, а радиус «тарелки» зеркала 0.5 м?

Решение.

Площадь, на которую приходит собираемая антенной энергия, равна площади круга «тарелки» зеркала и не зависит от кривизны его поверхности.

Поэтому $S = \pi \cdot 0{,}5^2 = 0{,}785$ м^2, и на антенну приходит мощность $1360 \cdot 0{,}78$ = **1070 Вт**.

Расстояние от фокуса до поверхности позволяет определить площадь самой поверхности антенны, но в расчётах падающего потока энергии важна именно проекция площади на перпендикулярную лучам Солнца плоскость. Так что эта величина для расчётов не нужна.

---

9. Как известно, Деда Мороза можно увидеть либо в красной, либо в синей шубе. Предполагая, что шуба у него на самом деле всё время зелёная, а кажущееся «смещение» цвета объясняется высокой скоростью его передвижения, оцените эту скорость.

Решение

Примем длину волны зелёного цвета за 550 нм, красного за 650 нм, синего за 450 нм.

Изменение цвета при движении источника излучения описывается законом Доплера: относительное изменение длины волны равно скорости в единицах скорости света.

Имеем: v / c = 100 нм / 550 нм = 0.18, и скорость равна 0.18 c = **54,5 тыс. км/с**.

Дед Мороз получается достаточно релятивистский, что в целом соответствует техническому заданию по вручению подарков всем детям Земли за одну ночь.

Всесибирская открытая
олимпиада школьников по астрономии

Дистанционный отборочный этап

10 класс

1. Высота орбиты спутника 333 км. Какие максимальные красное и фиолетовое смещения испытывает сигнал спутника при его приёме на Земле?

Решение

Красное и фиолетовое смещения определяются лучевой компонентой скорости спутника относительно наблюдателя на Земле.

Максимальная радиальная скорость будет достигаться, когда: 1) спутник на экваториальной орбите, 2) наблюдатель на экваторе Земли, 3) спутник виден на горизонте, около точки своего захода или восхода.

Относительная скорость спутника и наблюдателя определяется орбитальной скоростью спутника и скоростью суточного вращения Земли. Вычисления проще проводить в «синодической» системе отсчёта, где наблюдатель вместе с Землёй неподвижен, а спутник обращается вокруг Земли с относительной угловой скоростью.

Относительная угловая скорость спутника равна $\omega_{отн} = (GM/R^3)^{0,5} - \omega_{сут} = 1,15 \cdot 10^{-3} - 7,27 \cdot 10^{-5} = 1,08 \cdot 10^{-3}$ рад/с. Линейная геоцентрическая скорость спутника в такой системе отсчёта равна $1,08 \cdot 10^{-3}$ рад/с $\cdot$ 6700 км = 7,2 км/с.

В точке восхода угол между лучом зрения наблюдателя и направлением скорости спутника равен $\arccos (R_З / R_З+h) = 18°$. Лучевая компонента скорости равна 7,2 км/с $\cdot \cos 18° = 6,85$ км/с.

Соответственно, по формуле Доплера, красное и фиолетовое смещения будут равны $6,85 / 3 \cdot 10^5 = 2,3 \cdot 10^{-5}$.

---

2. На какой широте, перемещаясь на 1 м в сторону, мы меняем местное звёздное время на 1 час? В какую сторону нужно перемещаться для наиболее «эффективного» изменения местного звёздного времени?

3. Рассчитайте равновесную температуру тела на поверхности Земли, если известно, что оно полностью поглощает только видимое излучение. Атмосферным поглощением пренебречь.

4. Сколько времени длится на космической станции «ночь», если станция находится на высоте 420 км над поверхностью Земли и движется в плоскости экватора?

5. Сколько солнечной энергии в секунду собирает параболическое зеркало, расположенное на орбите около Земли, если от фокуса до основания параболы 2 м; а радиус «тарелки» зеркала 0.5 м?

Решения задач 2-5 приведены в разделе «9 класс».

---

6. Если мы находимся на МКС, с какого расстояния мы увидим в телескоп с объективом D=30 см и окуляром d = 10 мм, квадратный лист алюминия площадью 1 $м^2$? Считаем, что лист алюминия находится в противостоянии Солнцу.

Решение

Считаем, что лист находится не слишком далеко от орбиты Земли (и МКС), так что можно считать расстояние от Солнца до листа равным 1 а.е. Полученный ответ позволит нам оценить правдоподобность такого приближения.

Лист расположен перпендикулярно потоку солнечных лучей, и плотность потока падающей на лист энергии равна «солнечной постоянной» (примерно 1360 Вт/$м^2$). Альбедо алюминия составляет около 0,7, так что поток отражённой энергии (фактически – светимость листа) равен $L = 1360$ Вт/$м^2 \cdot 1$ $м^2 \cdot 0{,}7 = 950$ Вт.

Плотность потока отражённого листом света, падающая в телескоп на МКС, равна $L / 2\pi S^2$ (S – расстояние от МКС до листа; считаем, что лист отражает равномерно во все стороны). Телескоп увеличивает этот поток в $k = D^2/d^2 = 900$ раз. Для того, чтобы разглядеть глазом этот лист в телескоп, итоговый увеличенный поток должен соответствовать светилу $+6^m$.

Сравнивая поток от листа с потоком от Солнца, по закону Погсона получаем:

$(950 / 2\pi S^2) / 1360 = 2.512^{-26.8 - 6}$

Отсюда $S^2 = 950 / 1360 \cdot 2.512^{32.8} = 9{,}2 \cdot 10^{12}$ $м^2$, и **S = 3 тыс. км.**

Действительно, S << 1 а.е., так что наше изначальное предположение вполне оправдано.

---

7. В тесной двойной системе менее массивный компонент является двойником Солнца, а более массивный – двойником звезды Сириус А. Период обращения компонент вокруг общего центра масс составляет 60 часов. Вокруг этой пары с периодом 5 земных лет вращается планета, похожая на Землю. Рассчитайте равновесную температуру на планете. Парниковым эффектом и внутренними источниками энергии планеты пренебречь.

Решение

Чтобы точнее понять геометрию и механику системы, рассчитаем расстояние между двумя звёздами и радиус орбиты планеты.

Из третьего закона Кеплера в «правильной» системе единиц $T^2 (M_1 + M_2) = (R_1+R_2)^3$.

По условию $M_1 = Mc$, $M_2 = 2\ Mc$, $T = 60$ часов $= 6{,}84 \cdot 10^{-3}$ года. Поэтому расстояние между звёздами равно 0,052 а.е.

Аналогично для радиуса орбиты планеты получаем значение 4,22 а.е. Фактически расстояние между звёздами много меньше радиуса орбиты планеты, так что две звезды можно считать находящимися на одном расстоянии от неё.

Суммарная светимость двух звёзд составляет около 26 солнечных. Плотность потока энергии на поверхность планеты будет равна $1360 \cdot 26 / 4.22^2 = 1985$ Вт/$м^2$.

Если помнить (или найти), что эффективная температура Земли при потоке 1360 Вт/м^2 примерно равна 250 К, то равновесная температура нашей планеты будет равна 250 · (1985/1360)^{0,25} = **275 К.**

Тот же результат можно получить прямым вычислением эффективной температуры через потоки энергии и альбедо (которое равно альбедо Земли из условия «похожести» планет).

---

8. Компоненты двойной системы похожи на Солнце и находятся на расстоянии 3 а.е. друг от друга. Посередине между ними расположен тонкий плоский солнечный парус, одна сторона которого – абсолютно чёрная – «смотрит» на одну звезду, другая – абсолютно белая – смотрит на другую звезду. Площадь паруса 8 м^2, масса 300 г. Какое ускорение будет у солнечного паруса в начальный момент времени? В какой точке пространства нужно поместить этот парус, чтобы его ускорение было нулевым?

Решение

Световое давление на чёрную сторону паруса равно плотности потока энергии, приходящей на сторону паруса, делённой на скорость света. Световое давление на белую (отражающую) сторону ровно в два раза больше.

Плотность потока энергии от Солнца на расстоянии 1,5 а.е. легко вычисляется из значения «солнечной постоянной» для Земли: W = 1360 Вт/м^2 / 1,5^2 = 604 Вт/м^2.

Считаем давление: P_{black} = 604 / 3·10^8 = 2 мкПа, P_{white} = 4 мкПа.

Суммарная сила действует по направлению чёрной стороны паруса и равна F = (P_{white} – P_{black}) S = 16 мкН, ускорение паруса равно a = F/m = **53 мкм/с^2**. Для масштаба: за первый час своего движения такой парус пройдёт около 340 м и наберёт скорость около 20 см/с. Впрочем, в космосе спешить некуда.

Для достижения равновесия сил нам нужно сдвинуть парус в направлении «чёрной» его стороны. Тогда поток на чёрную сторону увеличится, а на белую уменьшится.

При сдвиге на X м давление на чёрную сторону равно 2 мкПа · (1,5 а.е. / (1,5 а.е. – X))^2, давление на отражающую сторону равно 4 мкПа · (1,5 а.е. / (1,5 а.е. + X))^2.

Приравнивая давления, получаем:

(1,5 а.е. + X) / (1,5 а.е. – X) = 1,41

Отсюда необходимый сдвиг равен **X = 0,88 а.е**.

---

9. Как известно, Деда Мороза можно увидеть либо в красной, либо в синей шубе. Предполагая, что шуба у него на самом деле всё время зелёная, а кажущееся «смещение» цвета объясняется высокой скоростью его передвижения, оцените эту скорость.

Решение задачи 9 приведено в разделе «9 класс».

---

1. Компоненты двойной системы похожи на Солнце и находятся на расстоянии 3 а.е. друг от друга. Посередине между ними расположен тонкий плоский солнечный парус, одна сторона которого – абсолютно чёрная – «смотрит» на одну звезду, другая – абсолютно белая – смотрит на другую звезду. Площадь паруса 8 м^2, масса 300 г. Какое ускорение будет у солнечного паруса в начальный момент времени? В какой точке пространства нужно поместить этот парус, чтобы его ускорение было нулевым?

Решение задачи приведено в разделе «10 класс»

---

2. Высота экваториальной орбиты спутника 1000 км, для наблюдателя на поверхности Земли спутник проходит через зенит. Выведите зависимость видимой угловой скорости спутника для наблюдателя от времени (t=0 – момент начала наблюдения). Начертите графики.

Решение

Орбита спутника экваториальная, для наблюдателя спутник проходит через зенит, значит, наблюдатель находится на земном экваторе.

Перейдём во вращающуюся систему отсчёта, в которой Земля (и наблюдатель) покоится. В этой системе отсчёта спутник обращается вокруг Земли против часовой стрелки с постоянной геоцентрической угловой скоростью $\omega_{отн} = \omega_C - \omega_З = (GM/(R+h)^3)^{1/2} - 2\pi/86400 = 9.3 \cdot 10^{-4}$ рад/с.

Линейная скорость спутника в этой СО также будет постоянна по модулю и равна 6,83 км/с.

Однако из-за того, что наблюдатель находится не в центре вращения, видимая угловая скорость спутника будет изменяться со временем. Видимая угловая скорость определяется тангенциальной компонентой линейной скорости спутника и расстоянием от него до наблюдателя: $\omega = V_\perp / D$.

Обозначим центральный геоцентрический угол между лучом, идущим в зенит наблюдателя, и лучом, идущим в точку текущего положения спутника, за α. Этот угол равномерно изменяется со временем с течением полёта спутника. Тогда по теореме косинусов расстояние между наблюдателем и спутником равно

$D = (R^2 + (R+h)^2 - 2 R (R+h) \cos\alpha)^{1/2}$

Угол между направлением луча зрения наблюдателя и радиус-вектором спутника вычисляется из теоремы синусов: $\sin\beta = \sin\alpha\, R / D$. Тангенциальная скорость спутника равна $V_\perp = V \cos\beta$.

Собирая всё воедино, получаем достаточно громоздкую формулу для видимой угловой скорости, однако, содержащую только известные величины:

$\omega = \omega_{отн} (R+h) [1 - R^2 \sin^2 \omega_{отн}t / (R^2 + (R+h)^2 - 2 R (R+h) \cos \omega_{отн}t)] / (R^2 + (R+h)^2 - 2 R (R+h) \cos \omega_{отн}t)^{1/2}$

---

3. Метеорит летит к Земле с начальной скоростью (на бесконечном удалении) 13 км/с и прицельным параметром 1.5 Rз. Произойдет ли соударение метеорита с Землей? Если да, то каким должно быть минимальное значение прицельного параметра, чтобы удара не произошло?

Решение

При орбитальном движении работают законы сохранения энергии и момента импульса.

Начальная энергия метеорита равна $E = mv_0^2/2$, начальный момент импульса равен $L = mv_0\rho$ ($\rho = 1{,}5\ R_З$ – прицельный параметр, $v_0 = 13$ км/с – начальная скорость).

В точке перигелия скорость метеорита равна $v_п = L / (mR_П) = v_0\ \rho / R_П$. Энергия в точке перигелия складывается из кинетической и потенциальной и равна $E = mv_П^2/2 – GMm/ R_П = mv_0^2\rho^2/2\ R_П^2 – GMm/ R_П$. Закон сохранения энергии превращается в квадратное уравнение относительно радиуса перигелия. Масса метеорита сокращается, а все остальные параметры даны по условию.

Из этого же уравнения можно выразить прицельный параметр через перигелийное расстояние. Метеорит врезается в Землю, если расстояние перигелия меньше радиуса Земли (6371 км).

$\rho = R_П\ (1 + 2GM / (R_Пv_0^2)\ )^{1/2}$

Получаем, что минимальное перигелийное расстояние, при котором столкновения не произойдёт, равно **1,32 $R_З$ = 8400 км**. То есть при заданном в условии прицельном параметре метеорит с Землёй **не столкнётся**, хоть и пройдёт достаточно близко от её поверхности.

---

4. Предположим, что вещество в Солнце распределено равномерно и плотность всюду равна среднему значению 1,4 г/см^3. Свойства такого «однородного» Солнца должны быть близки к реальному случаю в средней точке, то есть в любой точке, находящейся в слое, расположенном на расстоянии половину радиуса Солнца от его центра. Рассчитайте давление и равновесную температуру Солнца в этой точке. Почему в законе Стефана-Больцмана при расчете светимости звезды мы используем только температуру на поверхности звезды?

Решение

Как известно, внутри однородного шара ускорение свободного падения растёт линейно от центра к поверхности. К этому же выводу легко прийти прямыми расчётами, полагая, что на точку внутри шара гравитационно воздействуют только более глубокие слои.

На тело в средней точке Солнца (на половине радиуса) действует гравитационное давление более высоких слоёв, скомпенсированное световым давлением, действующим изнутри.

Гравитационное давление можно оценить по формуле $P = \rho g_{ср}\cdot R/2$, где $g_{ср}$ – среднее ускорение свободного падения на промежутке между R/2 и R. При линейной зависимости ускорения от радиуса $g_{ср}$ равно ускорению в середине этого промежутка, то есть $g_{ср} = GM/R^2\cdot 3/4$.

Получаем выражение для давления: $P = \rho \cdot GM/R \cdot 3/8 =$ **10^{14} Па**.

Это давление должно быть скомпенсировано излучением более глубоких слоёв. Для оценки можно считать поток чёрнотельным и плотность потока равной, по закону Стефана-Больцмана, $E = \sigma T^4$. Тогда световое давление $P_c = \sigma T^4 / c$, и температура $T = (c \cdot P/\sigma)^{1/4}$ = **27,0 млн К**.

---

5. С какой минимальной скоростью и в каком направлении космонавт на МКС должен бросить молоток, чтобы молоток упал на Землю быстрее, чем за 1,5 часа?

Решение

Чтобы молоток быстро (за период менее оборота) упал на Землю, нам нужно скомпенсировать его орбитальную (тангенциальную) скорость. Наиболее оптимально это делать, придавая ему импульс против скорости его обращения вокруг Земли.

Тогда текущая точка станет точкой афелия новой орбиты молотка. Перигелий же должен находиться не очень далеко от поверхности Земли, внутри атмосферы (скажем, на высоте 50 км). Тогда мы можем посчитать параметры новой орбиты:

$R_А$ = 6370 + 400 = 6770 км, $R_П$ = 6370 + 50 = 6420 км.

$e = (RA – RП) / (RA + RП) = 0{,}0265$

$V_А = (GM/R_А \cdot (1 + e))^{1/2}$ = 7,79 км/с

А изначальная скорость молотка (вместе с МКС) равна $V_0 = (GM/R_А)^{1/2}$ = 7,69 км/с.

Итоговая скорость молотка = 0,1 км/с = **100 м/с**. Бросать надо против орбитальной скорости станции.

---

6. В спектре далёкой звезды линия поглощения водорода наблюдается на длине волны 19000 Å. Определить минимальное значение скорости движения звезды относительно Солнца. Может ли звезда принадлежать нашей галактике?

Решение.

В условии задачи не указано (специально), какая именно линия водорода наблюдается на заданной длине волны. Понятно, что если мы возьмём самую «популярную» линию Hα с длиной волны 6563 Å, то полученная ультрарелятивистская скорость удаления звезды не позволит ей быть частью нашей Галактики. Но, возможно, более близкие к длине волны 19000 Å линии водорода обеспечат приемлемую скорость?

Ближайшая линия – 18751 Å (линия Пашена). Красное смещение равно 249 / 18751 = 0,013. По формуле нерелятивистского эффекта Доплера получаем v = 3983 км/с.

Скорость звезды уже не запредельная, но заведомо (на порядок) превышает характерные величины круговых скоростей звёзд в нашей Галактике.

Таким образом, либо звезда за счёт экстремальных взаимодействий прямо сейчас выбрасывается из нашей Галактики, либо этот источник находится **за пределами Галактики** (что вероятнее).

---

7. Видимая звёздная величина звезды спектрального класса K2IV равна $+4^m$. В каком диапазоне может меняться расстояние до этой звезды? Приведите примеры таких звёзд на земном небе.

Решение

Звезда класса K2IV – субгигант с характерной температурой поверхности около 5 тыс. К. По диаграмме Герцшпрунга-Рассела, характерная абсолютная звёздная величина таких звёзд – от $+4^m$ до $+2^m$. Если нам известна видимая звёздная величина, то расстояние мы можем определить из закона Погсона и закона обратных квадратов.

$D = 10\text{ пк} \cdot 2{,}512^{(m - M) / 2}$

Диапазон расстояния получается **от 10 пк до 25 пк**.

Примерами таких достаточно редких звёзд могут служить Альраи (гамма Цефея), звезда GK Персея (Туманность Фейерверк), U Скорпиона и другие.

---

8. Когда в Новосибирске взойдёт Ахернар? Почему?

Решение.

Ахернар, альфа Эридана – яркая звезда южного неба, имеющая склонение около –57° и прямое восхождение 1h37m. Для Новосибирска, находящегося на широте +55°, эта звезда является невосходящей с высотой верхней кульминации около –22°.

Таким образом, ответ, сразу приходящий в голову – Ахернар никогда в Новосибирске не взойдёт. Однако этот ответ не соответствует действительности.

Из-за прецессии земной оси северный и южный полюса мира движутся по окружности вокруг полюсов эклиптики со средней скоростью около 50" в год, совершая полный оборот примерно за 26 тыс. лет. Список «поляриссим» – звёзд, около которых в разное время будет проходить северный полюс мира – можно найти, например, в «Википедии». Соответственно, изменяются и экваториальные координаты звёзд. Так что можно надеяться, что когда-нибудь склонение Ахернара превысит значение -35°, и он будет видим в Новосибирске.

Точный расчёт времени, хоть и не представляет особой сложности для знакомых со сферической тригонометрией, выходит за рамки необходимого в данной задаче. Для примерной оценки сроков достаточно оценить угловое расстояние от Ахернара до некоторых звёзд-поляриссим.

Расстояние на небесной сфере можно вычислить разными методами, например, через скалярное произведение радиус-векторов. С одной стороны, оно равно косинусу угла между векторами, с другой – выражается через координаты:

$\cos \varphi = \sin \delta_1 \sin \delta_2 + \cos \delta_1 \cos \delta_2 \cos \Delta RA$

Например, примерно через 5 тысяч лет полярной звездой будет Альдерамин (альфа Цефея) с современными координатами RA = 21h18m, $\delta = 62°35'$. Расстояние между Альдерамином и Ахернаром, посчитанное по приведённой выше формуле, составляет около 130°, что приводит к увеличению склонения Ахернара до -40°. Уже лучше, но недостаточно.

Следующая поляриссима (примерно через 7 тысяч лет) – Денеб, RA = 20h41m, δ = +45°. Расстояние от Ахернара – около 119°, склонение Ахернара в эту эпоху – около -29°. Ахернар стал восходящей звездой для Новосибирска с высотой верхней кульминации около +6°.

Остаётся надеяться, что Новосибирск проживёт ещё 7 тысяч лет, или по крайней мере на этом месте будет кому наблюдать восход Ахернара **примерно в 9000 году нашей эры**.