Решения и критерии проверки задач Заключительного этапа
Всесибирской олимпиады школьников 2019-2020 г.г. по математике
7 класс

Время выполнения задания 4 астрономических часа
Каждая задача оценивается в 7 баллов

7.1. Паша и Саша сделали три одинаковых машинки. Саша сделал третью часть первой машинки, пятую часть второй машинки и пятнадцатую часть третьей машинки. Какую часть всей работы сделал Саша?
Ответ: пятую часть.
Решение 1: Всего Саша сделал 1/3 +1/5 +1/15 = 3/5 машинки. Что составляет 3/5 : 3 = 1/5 от трёх машинок.
Решение 2: Разделим каждую машинку на 15 частей. Всего 45 частей. Саша сделал пять частей от первой машинки, 3 части от второй машинки и 1 часть от третьей машинки. То есть всего 9 частей из 45, другими словами, пятую часть.
Критерии: Только ответ – 0 баллов. Частичное решение задачи – 0 баллов.

7.2. Юра и Рома нашли пять натуральных чисел, идущих подряд, и возвели каждое из них в квадрат. После этого Юра забрал себе три из пяти получившихся квадратов, а Рома два оставшихся. Оказалось, что сумма чисел, которые забрал Юра, равна сумме чисел, которые забрал себе Рома. Приведите пример чисел, которые могли найти Юра и Рома, и проверьте, что они подходят.
Ответ: Например, 10, 11, 12, 13, 14. Юра забрал квадраты первых трёх чисел 100 + 121 + 144 = 365. Роме достались оставшиеся два квадрата 169 + 196 = 365.
Критерии: Любая подходящая пятёрка чисел без проверки – 3 балла.

7.3. На плоскости расположены точки A, B, C, D, X. Известны некоторые длины отрезков: $AC = 2$, $AX = 5$, $AD = 11$, $CD = 9$, $CB = 10$, $DB = 1$, $XB = 7$. Найдите длину отрезка CX.
Ответ: 3.
Решение: Заметим, $AD = 11 = 2 + 9 = AC + CD$. Значит, точки A, C, D лежат на одной прямой CD (так как неравенство треугольника обращается в равенство). Заметим, $CB = 10 = 9 + 1 = CD + DB$. Значит, точки C, D, B лежат на одной прямой CD (так как неравенство треугольника обращается в равенство). Значит, все четыре точки лежат на одной прямой CD, при этом C между AD, а D между C и B, то есть в порядке A, C, D, B. Заметим $AB = AD + DB = 11 + 1 = 5 + 7 = AX + XB$. Значит, точки A, X, B лежат на одной прямой AB (так как неравенство треугольника обращается в равенство).
Итак, все точки лежат на отрезке AB. Значит, $CX = AX – AC = 5 – 2 = 3$.
Критерии:
Только ответ – 0 баллов.
Ответ с проверкой – 1 балл.
Решение из предположения, что все точки лежат на одной прямой – не более 3 баллов.

7.4. Петя и Волк играют в игру. Изначально на доске написано число 0, каждым ходом написанное число нужно увеличить на 2, 3, 8 или 9. Ходы делаются по очереди, первым ходит Петя. Выигрывает тот, после чьего хода получится число, кратное 2020. Кто может обеспечить себе победу вне зависимости от действий соперника?
Ответ: Петя.
Решение: Пусть Петя сначала напишет 3, а потом будет дополнять ход Волка так, чтобы сумма их ходов прибавляла 11 (если Волк добавляет 3, то Петя добавляет 8 и наоборот, если Волк добавляет 2, то Петя добавляет 9 и наоборот). Таким образом, после хода Пети число имеет вид $3 + 11k$. При этом никакое число такого вида не будет пропущено, так как Волк и Петя добавляют ровно 11. А

после хода Волка число может иметь один из следующих видов: $11k$ (если Волк добавляет 8), $11k + 5$ (если Волк добавляет 2), $11k + 6$ (если Волк добавляет 3), $11k + 1$ (если Волк добавляет 9).
Заметим, что $2020 = 183*11 + 7$. Никто из играющих не может это получить. Далее, $4040 = 367*11 + 3$. Число такого вида Волк не может получить, а Петя получить обязан, как было показано ранее.
Критерии:
Только ответ – 0 баллов.
Выделение парных ходов 3-8, 2-9 (даже если стратегия за другого игрока), других продвижений нет – 2 балла.

7.5. В кружке занимались 50 школьников, которые иногда ходили на занятия. Оказалось, что любые два школьника встретились на каком-либо занятии ровно один раз. Кроме того, известно, что ни на одно занятие не приходили все школьники одновременно. Докажите, что есть школьник, который был хотя бы на 8 занятиях.
Решение: Допустим, это не так. Возьмём произвольного школьника, назовём его Юрой. Юра пришёл не более чем на 7 занятий и встретил всех других школьников. То есть, найдётся занятие, допустим первое, на которое, кроме Юры, пришло ещё хотя бы 7 школьников (если это не так, то всего школьников без Юры меньше 49). Кроме этого, обязательно найдётся школьник, который первое занятие не посетил, назовём его Ромой (иначе на этом занятии были все школьники). Итак, Рома должен встретиться с Юрой и с хотя бы ещё 7 школьниками, которые были на первом занятии. При этом Юра и эти школьники уже один раз встретились на первом занятии и больше встречаться не могут. Значит, Рома встречал их на разных занятиях. Но для этого нужно хотя бы 8 занятий (одно для Юры и ещё по одному для оставшихся школьников с первого занятия). Противоречие. Значит, обязательно найдётся школьник, который сходил хотя бы на 8 занятий.
Критерии: Логика решения продемонстрирована только на частных случаях – 3 балла.

Решения и критерии проверки задач Заключительного этапа Всесибирской олимпиады школьников 2019-2020 г.г. по математике

8 класс

Время выполнения задания 4 астрономических часа
Каждая задача оценивается в 7 баллов

8.1. Паша и Саша сделали три одинаковых машинки. Саша сделал пятую часть всей работы. После этого они их продали и разделили выручку пропорционально проделанной работе. Паша заметил, что если он отдаст Саше 400 рублей, а Саша сделает ещё такую же машинку и продаст её, то денег у них будет поровну. Сколько стоит одна машинка?

Ответ: 1000 рублей.

Решение: Саша сделал пятую часть всей работы, то есть он сделал 0,6 одной машинки, а Паша оставшиеся 2,4. То есть разница в 1,8 машинки. Если Саша сделает ещё машинку, то разность будет 0,8 одной машинки. Паша отдал 400 своих рублей, тем самым он уменьшил количество денег у себя на 400 рублей и на ту же сумму увеличил количество денег у Паши. То есть изменил разность количество денег у одного и у другого на 800 рублей. Итак, 0,8 машинки соответствует 800 рублям. Следовательно, целая машинка стоит 1000 рублей.

Критерии: Только ответ – 0 баллов.

Ответ с проверкой – 1 балл.

Решение, в котором 0,8 машинки соответствует 400 рублей – не более 2 баллов.

8.2. У Марка 2020 камней. Он собирается их разделить на 5 кучек так, чтобы не было двух кучек с одинаковым количеством камней. При этом Марк хочет, чтобы можно было бы любую кучку убрать, а все камни из неё разложить по оставшимся четырём кучкам так, чтобы во всех них стало равное число камней. Получится ли у Марка сделать задуманное?

Ответ: Получится.

Решение: Например, кучи 402, 403, 404, 405, 406.

Докажем, что такие кучи подойдут. Для удобства рассмотрим каждую кучу как 396 основных камней и ещё 6, 7, 8, 9, 10 добавочных камней, соответственно. Часть в 396 камней делится на 4 кучи поровну (по 99 камней). Таким образом, во всех кучах основных камней поровну.

Кучу в 6 камней раскладываем на 3, 2, 1 и 0 камней и добавляем к оставшимся кучам до 10 добавочных камней.

Кучу в 7 камней раскладываем на 4, 2, 1, 0 камней и добавляем к оставшимся кучам до 10 добавочных камней.

Кучу в 8 камней раскладываем на 4, 3, 1, 0 камней и добавляем к оставшимся кучам до 10 добавочных камней.

Кучу в 9 камней раскладываем на 4, 3, 2, 0 камней и добавляем к оставшимся кучам до 10 добавочных камней.

Кучу в 10 камней раскладываем на 4, 3, 2, 1 камней и добавляем к оставшимся кучам до 10 добавочных камней.

Критерии:

Только ответ – 0 баллов.

Только верный пример без проверки – 3 балла.

Утверждение «очевидно, если Марк сделает все кучки меньше чем по 505 камней, то у него всё получится» без внятных обоснований – 3 балла.

Утверждение «очевидно, если Марк сделает все кучки меньше чем по 505 камней, то у него всё получится» с доказательством, но без пояснения, почему на такие кучки можно разложить 2020 камней – 6 баллов.

Верный пример с частичный проверкой и утверждением, что «дальше аналогично», если дальше аналогия работает – 7 баллов.

8.3. На доске написано число 4. За один ход Ане разрешается выбрать любой собственный делитель числа, написанного на доске, и прибавить его к этому числу, записав сумму вместо старого числа. Данную операцию разрешается проделывать неограниченное число раз. Докажите, что Аня может получить на доске любое составное число. Делитель числа n называется собственным, если он не равен 1 и n.

Решение:

Любое чётное число Аня получит из 4 прибавлением 2 необходимое число раз.

Нечётное составное число можно представить в виде pk, где p – наименьший простой делитель этого нечётного числа. Пусть Аня сначала получит чётное число $2k$, а затем добавлением k необходимое число раз, получит pk.

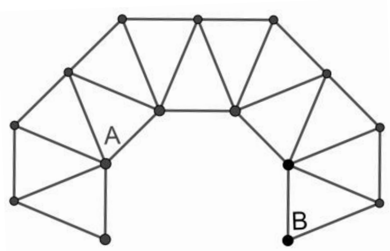
Критерии:

Рассмотрен случай чётного числа – 1 балл.

Рассмотрен случай числа, кратного 3 (или 5, или 7 и т.д.) – 2 балла.

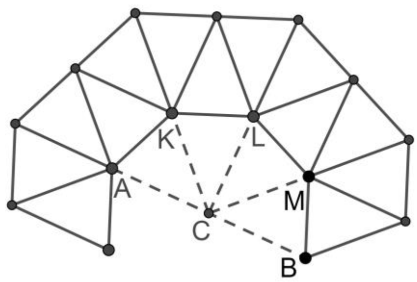
Рассмотрены чётные числа и нечётные числа, кратные 3 (или 5, или 7 и т.д.) – 3 балла.

8.4. Из одинаковых равнобедренных треугольников, у которых угол напротив основания равен 45°, а боковая сторона равна 1, сложили фигуру, как показано на рисунке. Найдите расстояние между точками A и B.



Ответ: 2.

Решение: Обозначим точки K, L, M, как показано на рисунке. И построим равнобедренный треугольник AKC, равный исходным. Соединим вершину C с другими точками так, как на рисунке.



В исходных треугольниках угол при вершине равен 45°. Значит, два остальных угла равны по 62,5°. Тогда угол $\angle CKL$ = 360° - 62,5° - 62,5° - 45° - 45° - 62,5° = 62,5°. Тогда треугольники AKC и KLC равны по двум сторонам и углу между ними. Аналогично доказывается, что и треугольники LMC и MBC равны исходным. Тогда угол $\angle ACB$ равен 4*45° = 180°, то есть точки A, C, B лежат на одной прямой. Тогда $AB = AC + CB = 2$.

Критерии:

Построена подходящая конструкция, но не обосновано, что точки A, C, B лежат на одной прямой (или точка C – середина отрезка AB, но не обосновано, что получились треугольники равные исходным) – 1 балл.

Решение ссылается на то, что у правильного восьмиугольника есть центр, и другие очевидные свойства восьмиугольника – снимать не более 1 балла.

8.5. Юра и Рома нашли 2019 натуральных чисел, идущих подряд, и возвели каждое из них в квадрат. После этого Юра забрал себе 1010 из 2019 получившихся квадратов, а Рома 1009 оставшихся. Оказалось, что сумма чисел, которые забрал Юра, равна сумме чисел, которые забрал себе Рома. Приведите пример чисел, которые могли найти Юра и Рома, и проверьте, что они подходят.

Решение: Например, числа от 2037171 до 2039189.

Для проверки перепишем эти числа в другом виде. Обозначим за x число 2020*1009, тогда числа из примера будут представлены в виде $x - 1009$, …, x, …, $x + 1009$. Пусть Юра возьмёт квадраты первых 1010 чисел, а Рома 1009 оставшихся квадратов.

Сумма чисел у Юры будет равна $1010{*}x^2 - 2x(1 + \ldots + 1009) + 1^2 + \ldots + 1009^2$, а у Ромы $1009{*}x^2 + 2x(1 + \ldots + 1009) + 1^2 + \ldots + 1009^2$. Разность этих сумм равна $x^2 - 4x(1 + \ldots + 1009) =$

$x(x - 4(1 + \ldots + 1009)) = x(x - 2*1010*1009) = 0$ (так как $x = 2020*1009$). Значит, этот набор подходит.

Критерии:

Подходящий набор без доказательства, что он подходит – 0 баллов.

Верное доказательство, набор задан через переменные, или при попытки посчитать, что это будут за числа, допущена арифметическая ошибка – баллы не снимать.

Решения заданий Заключительного этапа Всесибирской открытой олимпиады школьников по математике 2019-2020 г.г.
Каждая задача оценивается в 7 баллов

Решения заданий 9 класса

9.1. Для неотрицательных чисел a,b,c,d выполнены равенства: $\sqrt{a+b}+\sqrt{c+d}=\sqrt{a+c}+\sqrt{b+d}=\sqrt{a+d}+\sqrt{b+c}$. Какое максимальное количество различных может быть среди чисел a,b,c,d?

Ответ. Два.

Решение. Возведём первое равенство в квадрат, приведём подобные, сократим на 2, ещё раз возведём в квадрат, снова приведём подобные, получив в итоге равенство $ac+bd=ab+cd$, равносильное $(a-d)(c-b)=0$, откуда либо $a=d$, либо $b=c$. Проделав аналогичные манипуляции со вторым равенством, получим $a=b$, либо $d=c$. Любое равенство из первой пары имеет общую букву с любым равенством из второй пары, поэтому три из четырёх чисел обязательно равны между собой и среди чисел a,b,c,d не может быть больше двух различных. С другой стороны, любой набор из четырёх неотрицательных чисел, среди которых три одинаковых, а четвёртое произвольно, очевидно удовлетворяет условию задачи, поэтому среди чисел a,b,c,d могут быть ровно два различных.

Критерии проверки. Доказательства того, что среди чисел a,b,c,d не может быть больше двух различных: 5 баллов. Пример, когда ровно два различных: 2 балла.

9.2. Если Петя отдаст две свои тетрадки Васе, то у Васи станет в n раз больше тетрадок, чем у Пети, а если Вася отдаст n своих тетрадок Пете, то у Пети станет в два раза больше тетрадок, чем у Васи. Найти все натуральные значения n, при которых это возможно.

Ответ. $n=1,2,3,8$.

Решение. Обозначим количество тетрадок у Пети и Васи за x и y штук соответственно. После передачи Петей Васе двух тетрадок получим равенство $n(x-2)=y+2$, а после передачи n тетрадок Васей Пете – равенство $x+n=2(y-n)$. Из первого равенства выразим $y=nx-2n-2$ и подставим во второе: $x+n=2nx-6n-4$, откуда $x=\frac{7n+4}{2n-1}=3+\frac{n+7}{2n-1}$. Дробь $\frac{n+7}{2n-1}>0$ должна быть натуральным числом, поэтому $2n-1\le n+7$, следовательно $n\le 8$. Перебрав натуральные числа от 1 до 8, мы получим, что дробь $\frac{n+7}{2n-1}$ принимает целые значения при $n=1,2,3,8$. При этом соответствующие пары (x,y) равны (11,7),(6,6),(5,7),(4,14).

Критерии проверки. Составлена, но не решена соответствующая система уравнений: 2 балла. Если решение доведено до стадии $x=\frac{7n+4}{2n-1}$: 3 балла.

Если решение доведено до стадии $2n-1\le n+7$: 4 балла. Найдены $n=1,2,3,8$, но не указаны соответствующие пары (x,y): 6 баллов. Только приведены примеры для некоторых n: 1 балл. Примеры для всех n: 2 балла.

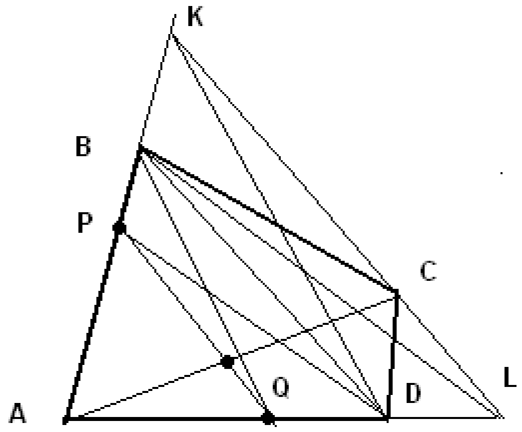
9.3. Можно ли разбить все натуральные числа от 1 до 100 включительно на десять множеств, содержащих различное количество чисел каждое и таких, что, чем больше чисел содержит множество, тем меньше сумма его элементов?

Ответ. Нет.

Решение. Предположим, указанное в условии разбиение возможно. Сумма всех чисел от 1 до 100 равна 5050, следовательно, сумма чисел во множестве с максимальной суммой не меньше 5050:10=505, поэтому оно содержит не меньше 6 чисел. По условию, каждое из девяти оставшихся множеств содержит различное, большее шести, количество чисел. Следовательно, во всех десяти множествах содержится не меньше 6+7+…+15=105 чисел – противоречие.

Критерии проверки. Доказано, что множество с минимальным количеством чисел содержит не меньше 6 чисел: 3 балла.

9.4. На сторонах AB и AD выпуклого четырёхугольника ABCD отмечены точки P и Q соответственно такие, что отрезки BQ и DP делят площадь четырёхугольника пополам. Доказать, что отрезок PQ проходит через середину диагонали AC.



Доказательство. Проведём через вершину C параллельно диагонали BD прямую, пересекающую продолжения сторон AB и AD в точках K и L соответственно. Площади треугольников BKD, BCD и BLD, имеющих общее основание BD и одинаковые высоты, равны, поэтому площади треугольников AKD и ABL равны площади четырёхугольника ABCD, а отрезки DP и BQ делят их площади соответственно пополам. Следовательно, отрезки DP и BQ являются медианами треугольников AKD и ABL, а точки P и Q серединами отрезков AK и AL. Значит, отрезок PQ – средняя линия в треугольнике AKL, параллельная стороне KL и, по теореме Фалеса, делит отрезок AC пополам, что и требовалось доказать.

9.5. Прямоугольник 17 на 19 клеток произвольным образом разбит отрезками, идущими по линиям сетки, на меньшие прямоугольники. Доказать, что найдётся прямоугольник разбиения, все четыре расстояния (измеряемые в клетках) от каждой стороны которого до ближайшей стороны большого прямоугольника имеют одну и ту же чётность.

Доказательство. Приведём следующие несложные и хорошо известные факты о прямоугольниках и полосках (прямоугольниках шириной в одну клетку) из клеток, раскрашенных в шахматном порядке.

1) Полоска из чётного числа клеток содержит равное количество белых и чёрных клеток, её крайние клетки окрашены в разные цвета. Полоска из нечётного числа клеток содержит клеток одного цвета на одну больше, чем другого, её крайние клетки окрашены в один цвет – цвет большинства клеток в полоске.

2) Если одна из сторон прямоугольника имеет чётную длину в клетках, то он содержит поровну чёрных и белых клеток, среди его углов две белых и две чёрных клетки. Это следует из п.1) и разбиения прямоугольника на полоски чётной длины. Если обе стороны прямоугольника имеют нечётную длину, то он содержит клеток одного цвета на одну больше, чем другого, четыре его угловые клетки окрашены в один цвет – цвет большинства клеток в прямоугольнике. Это следует из п.1) и разбиения прямоугольника на полоску нечётной длины и прямоугольник с чётной стороной. Крайние клетки каждой строки и столбца такого четырёхугольника окрашены в один цвет.

Перейдём к доказательству утверждения в условии. Раскрасим прямоугольник 17 на 19 в шахматном порядке так, что чёрных клеток в нём на одну больше, чем белых, тогда все его угловые клетки – чёрные. Тогда хотя бы один из прямоугольников разбиения тоже содержит чёрных клеток на одну больше, чем белых и его угловые клетки – тоже чёрные. Длины его сторон, в соответствии с п.2) – нечётны. Сумма расстояний (в клетках) от левого края выбранного прямоугольника до левого края исходного прямоугольника 17 на 19 и от правого края выбранного прямоугольника до правого края исходного прямоугольника 17 на 19 равна разности длин горизонтальных сторон этих прямоугольников, то есть разности двух нечётных чисел, следовательно, чётна. Значит, оба расстояния имеют одинаковую чётность. Аналогично, одинаковую чётность имеют и расстояния между верхним и нижним краями выбранного и исходного прямоугольников. Наконец, соединим левые нижние клетки обоих прямоугольников последовательностью клеток в виде уголка с концами в этих клетках. Поскольку крайние клетки этого уголка имеют один цвет, он содержит нечётное число клеток, равное сумме расстояний от левого края выбранного прямоугольника до левого края исходного прямоугольника и от нижнего края выбранного прямоугольника до нижнего края исходного прямоугольника плюс ещё одну клетку. Следовательно, сумма указанных расстояний чётна, поэтому они имеют одинаковые чётности. Таким образом, все четыре расстояния между соответствующими краями выбранного и исходного прямоугольников равны, что и требовалось доказать.

Критерии проверки. Замечено, что хотя бы один из прямоугольников разбиения тоже содержит чёрных клеток на одну больше, чем белых и его угловые клетки – тоже чёрные: 1 балл. Доказано, что расстояния между краями прямоугольников в одном направлении имеют одинаковую чётность: 3 балла.

Решения заданий 10 класса

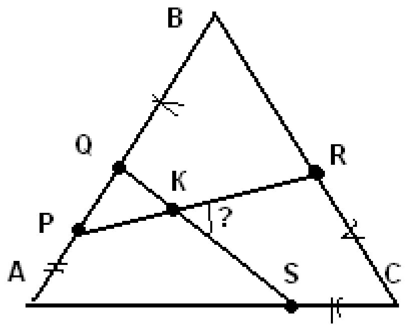
10.1. Пусть a,b,c - не обязательно различные натуральные числа такие, что дроби $\frac{a+b}{c},\frac{a+c}{b},\frac{b+c}{a}$ тоже являются натуральными числами. Найти все возможные значения суммы $\frac{a+b}{c}+\frac{a+c}{b}+\frac{b+c}{a}$.

Ответ. 6, 7 или 8.

Решение. Ввиду симметрии можно считать, что $a \le b \le c$. Тогда $a+b \le 2c$, поэтому целочисленность дроби $\frac{a+b}{c}$ влечёт $a+b=2c$ или $a+b=c$. В первом случае $a=b=c$ и сумма трёх дробей из условия равна 6. Пусть далее $a+b=c$. Из целочисленности дроби $\frac{a+c}{b}$ следует, что $2a$ делится на b, откуда либо $a=b$, и тогда $c=2a$, либо $2a=b$ и тогда $c=3a$. В первом из этих случаев сумма трёх дробей из условия равна 7, а во втором 8.

Критерии проверки. Получены ограничения $a+b=2c$ или $a+b=c$: по 1 баллу за каждое. Приведены примеры a,b,c для одного-двух из ответов 6, 7 или 8: 1 балл, а если для всех трёх ответов: 2 балла.

10.2. На сторонах AB, BC, AC равностороннего треугольника ABC отмечены точки P и Q, R,S соответственно, такие, что AP=CS, BQ=CR. Доказать, что угол между отрезками PR и QS равен 60 градусов.



Доказательство. Ввиду того, что AP=CS, BQ=CR, имеем BP=AB-AP=AC- CS= AS и BR=BC- CR=AB- BQ= AQ. Следовательно, треугольники AQS и BRP равны по парам равных сторон BP=AS, BR=AQ и углам между ними. Обозначим точку пересечения отрезков PR и QS за К. Тогда величина угла КРА равна 180 градусов минус величина BPR = 180 градусов минус величина KSA, то есть сумма углов КРА и KSA равна 180 градусов. Следовательно, сумма углов PAS и PKS тоже равна 180 градусов, то есть угол PKS равен 120 градусов. Отсюда угол RKS между отрезками PR и QS равен 180-120=60 градусам, что и требовалось доказать.

Критерии проверки. Доказано, что треугольники AQS и BRP равны: 3 балла.

10.3. Найти минимальное и максимальное значения выражения $3x^2y-2xy^2$, где x,y принимают произвольные значения из интервала $[0,1]$

Ответ. $-\frac{1}{3}$ и $\frac{9}{8}$

Решение 1. Положим $f(x,y)=3x^2y-2xy^2$, тогда $f(x,y)=xy(3x-2y)$. Полученное выражение равно 0 при $x=0$, или $y=0$, или $y=\frac{3}{2}x$. Следовательно, в области $0\le x,y\le 1$ функция $f(x,y)$ положительна ниже (или правее) прямой $y=\frac{3}{2}x$ и тут достигается её максимум, и отрицательна – выше (или левее) этой прямой и тут достигается её минимум. В первом случае, ввиду неравенства $x\le 1$ и положительности выражения в скобках получим $f(x,y)=xy(3x-2y)\le y(3-2y)=3y-2y^2$. Максимум этого квадратного трёхчлена достигается при $y=\frac{3}{4}$, $x=1$ и равен $\frac{9}{8}$, что даёт максимальное значение выражения из условия.

Во втором случае, ввиду неравенства $y\le 1$ и отрицательности выражения в скобках получим $f(x,y)=xy(3x-2y)\ge x(3x-2)=3x^2-2x$. Минимум этого квадратного трёхчлена достигается при $x=\frac{1}{3}, y=1$ и равен $-\frac{1}{3}$, что даёт минимальное значение выражения из условия.

Решение 2. Считаем переменную y параметром, лежащим в интервале $[0,1]$. При каждом фиксированном $y\in[0,1]$ квадратный трёхчлен $f(x)=3yx^2-2y^2x$ принимает минимальное значение, равное $-\frac{y^3}{3}$, при $x=-\frac{-2y^2}{2\cdot 3y}=\frac{y}{3}\in[0,1]$ следовательно, минимальное значение всего выражения достигается при $y=1, x=\frac{1}{3}$ и равен $-\frac{1}{3}$. Максимум же квадратного трёхчлена $f(x)=3yx^2-2y^2x$ при каждом фиксированном $y\in[0,1]$ на интервале $[0,1]$ достигается на его конце при $x=1$(значение на другом конце $x=0$ равно 0), и равен $3y-2y^2$. Следовательно, максимум $f(x)$ не превосходит максимума трёхчлена $3y-2y^2$, который достигается при $y=\frac{3}{4}$ из интервале $[0,1]$ и $x=1$, и равен $\frac{9}{8}$.

Критерии проверки. Доказана одна из оценок $-\frac{1}{3}$ и $\frac{9}{8}$: 3 балла.

10.4. На доске 10 на 10 часть клеток отмечена, причём никакие три отмеченные клетки не образуют уголок. Доказать, что доску можно разбить на домино из двух соседних по стороне клеток, содержащие не более одной отмеченной клетки каждое.

Доказательство. Разобьём доску 10 на 10 на квадратики 2 на 2 клетки. Ввиду того, что никакие три отмеченные клетки не образуют трёхклеточный уголок, каждый такой квадратик содержит не более двух отмеченных клеток. Если две отмеченные в нём клетки - соседние по стороне, то разобьём его на два домино линией сетки, содержащей эту сторону. В случаях, когда в квадратике отмеченные клетки не соседние, или их не больше одной, разбиваем его на домино произвольным способом, скажем, на горизонтальные. Разбив указанным образом каждый квадратик, получим разбиение доски 10 на 10 на домино, с одержащие не более одной отмеченной клетки каждое.

Критерии проверки. Замечено, что каждый квадратик 2 на 2 содержит не более двух отмеченных клеток. 3 балла.

10.5. Представить число 1000 в виде суммы максимально возможного количества натуральных чисел, суммы цифр которых попарно различны.

Ответ. 19.

Решение. Заметим, что минимальное натуральное число с суммой цифр A равно $a99\ldots99$, где первая цифра - остаток, а количество девяток в записи - неполное частное от деления A на 9. Отсюда следует что, если A меньше B, то и минимальное число с суммой цифр A меньше, чем минимальное число с суммой цифр B. Рассмотрим наименьшие натуральные числа с суммами цифр 1,2,3,…,19, 20, они равны соответственно $a_1 = 1, a_2 = 2, \ldots, a_9 = 9, a_{10} = 19, a_{11} = 29, \ldots, a_{18} = 99, a_{19} = 199, a_{20} = 299$. Сумма первых 19 из них равна 775, а остаток от деления её на 9 равен 1. как и остаток от деления 1000 на 9. Увеличим эту сумму на 225, взяв вместо 9 число 234 с той же суммой цифр и получим представление 1000 в виде суммы 19 чисел 1,2,3,4,5,6,7,8,19,29,39,49,59,69,79,89,99,199,234 с различными суммами цифр от 1 до 19.

Предположим, что 1000 можно представить в виде суммы $n \geq 20$ натуральных чисел $b_1, b_2, \ldots, b_n$ с различными суммами цифр $s(b_1) < s(b_2) < \ldots < s(b_n)$. В таком случае, $s(b_k) \geq k, k = 1,2,\ldots,n$, и, следовательно, $b_k \geq a_k, k = 1,2,\ldots,n$. Значит, $1000 = b_1 + b_2 + \ldots + b_n \geq a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geq a_1 + a_2 + \ldots + a_{20} = 1074$ – противоречие.

Критерии проверки. Найдено представление 1000 в виде суммы 19 чисел с различными суммами цифр: 3 балла. Доказательство максимальности 19: 4 балла.

Решения заданий 11 класса

11.1. Найти все решения системы уравнений в действительных числах:

$$\begin{cases} xy + z + t = 1, \\ yz + t + x = 3, \\ zt + x + y = -1, \\ tx + y + z = 1. \end{cases}$$

Ответ. $(1,0,-1,2)$.

Решение. Вычтем второе уравнение из первого, третье из второго, четвёртое из третьего, первое из четвёртого, разложим каждую разность на множители и получим: $(x-z)(y-1) = -2,\ (y-t)(z-1) = 4,\ (z-x)(t-1) = -2,\ (y-t)(x-1) = 0.$ Из второго равенства $y - t \neq 0,$ поэтому из четвёртого равенства $x = 1.$ Из первого и третьего равенств $x - z \neq 0$ и $y - 1 = -2 = 1 - t$, откуда $y = 2 - t$. Подставим найденные выражения в первое и второе уравнения исходной системы, получим $z = -1, t = 2$, откуда $y = 0$. Таким образом, получаем единственное решение системы: $(1,0,-1,2)$.

Критерии проверки. Угадан ответ с проверкой: 1 балл. Сделаны вычитания уравнений и решение доведено до стадии $(x-z)(y-1)=-2,..$: 2 балла. Отсюда найден $x=1.$: ещё 1 балл.

11.2. Пусть a,b,c - натуральные числа. Могут ли наибольшие общие делители пар чисел a и b, b и c, c и a равняться $30!+111$, $40!+234$ и $50!+666$ соответственно?

Ответ. Нет, не могут.

Решение. Предположим, что указанная в условии ситуация возможна. Заметим, что числа 30!, 40! и 50! делятся на 9 очевидным образом, числа 234 и 666 делятся на 9 по признаку, так как их суммы цифр делятся на 9, а вот 111 делится на 3, но не делится на 9. Отсюда следует, что числа 40!+234 и 50!+666 делятся на 9, а число 30!+111 не делится на 9. Таким образом, наибольшие общие делители пар чисел b и c, c и a делятся на 9, откуда следует делимость на 9 чисел a и b Последнее влечёт делимость на 9 их наибольшего общего делителя, равного 30!+111, которое, как мы установили, на 9 не делится – противоречие. Следовательно, указанная в условии ситуация невозможна.

Критерии проверки. Замечена с обоснованием делимость НОДов пар чисел b и c, c и a и не делимость НОДа пары a и b на 9: 2 балла. Решение приведено без точного обоснования делимости на 9: снимаем 2 балла.

11.3. Найти максимальную длину горизонтального отрезка с концами на графике функции $y=x^3-x$

Ответ. 2.

Решение 1. Горизонтальный отрезок длины $a>0$ с концами на графике функции $y=x^3-x$ существует тогда и только тогда, когда уравнение $(x+a)^3-(x+a)=x^3-x$ имеет при данном значении параметра a хотя бы одно решение. Раскрывая скобки, приводя подобные и сокращая на $a>0$, получим квадратное уравнение $3x^2+3ax+a^2-1=0$, которое разрешимо при $D=12-3a^2\ge 0$, откуда $0<a\le 2$. Следовательно, длина искомого отрезка не превосходит 2. При $a=2$ решением уравнения является $x=-1$, откуда следует, что длина 2 достигается для отрезка с концами (-1,0) и (1,0) на графике функции $y=x^3-x$.

Решение 2.

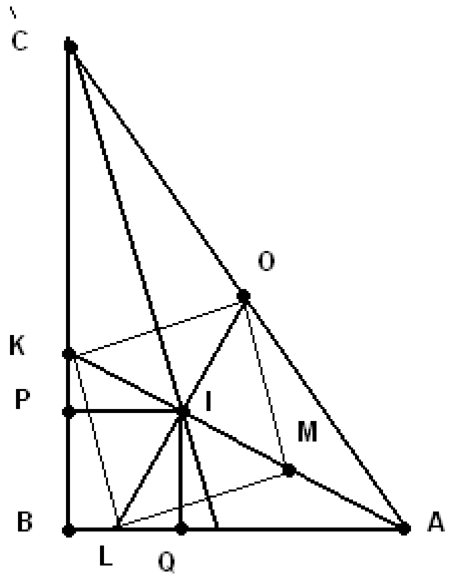
Как в решении 1, получаем уравнение $3x^2+3ax+a^2-1=0$, которое рассмотрим, как квадратное относительно a с параметром x: $a^2+3xa+3x^2-1=0$. Находим его корни $a_{1,2}=\dfrac{-3x\pm\sqrt{4-3x^2}}{2}$, ввиду положительности a рассматриваем только тот, что с плюсом: $a=\dfrac{\sqrt{4-3x^2}-3x}{2}$. Данная функция от x определена при $|x|\le\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ и положительна при $-\dfrac{2}{\sqrt{3}}\le x\le\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Её производная, равная

$a'(x) = -\frac{3x+3\sqrt{4-3x^2}}{2\sqrt{4-3x^2}}$ обращается в ноль при $x=-1$, слева больше ноля, а справа – меньше. Следовательно, её значение максимально при $x=-1$ и равно $a_{\max}=2$. Действительно, в данном случае отрезок длины 2 соединяет на оси ОХ два корня $x_1=-1$ и $x_2=1$ уравнения $x^3-x=0$.

Критерии проверки. Приведён ответ 2 и пример отрезка такой длины: 1 балл. Отсутствие явного примера в решении: минус 2 балла.

11.4. Пусть точки О и I –центр описанной и вписанной окружностей треугольника ABC соответственно. Известно, что угол AIO прямой, а величина угла CIO равна 45°. Найти отношение сторон AB:BC:CA.

Ответ. 3:4:5



Решение. 1. Величина угла AIC равна $180^\circ - \frac{A+C}{2} = 90^\circ + \frac{B}{2} > 90^\circ$. Если бы луч IO лежал бы вне угла AIC, величина угла AIO равнялась бы сумме величин AIC и CIO и была бы больше 90 градусов, что противоречит условию. Следовательно, луч IO лежит внутри угла AIC, поэтому величина угла AIC равна сумме величин углов AIO и CIO, то есть 135 градусам. Значит, угол ABC – прямой и треугольник ABC является прямоугольным с гипотенузой AC, а точка O – середина стороны AC.

2. Обозначим точку пересечения биссектрисы AI со стороной BC за K. Углы CIO и CIK равны 45, следовательно прямые IO и IK симметричны относительно биссектрисы CI, то же самое верно и для прямых CA и CB. Значит, треугольники CIO и CIK равны и точки O и K симметричны относительно CI, а треугольник OIK – прямоугольный равнобедренный.

3. Продлим отрезок OI до пересечения со стороной AB в точке L, симметричной O относительно биссектрисы AI. Обозначим за M середину отрезка AI, по теореме, обратной теореме Фалеса, отрезки OM и CI параллельны, следовательно угол IOM равен углу OIC, то есть 45 градусам. Значит, треугольник OIM – прямоугольный равнобедренный и равен треугольникам OIK и KIL. Отсюда следует, что точки I и M делят отрезок AK на три одинаковых части.

4. Опустим из точки I перпендикуляры IP и IQ на стороны BC и AB соответственно, точки P и Q являются точками касания этих сторон со вписанной окружностью, четырёхугольник PIQB является квадратом. Углы KIL и PIQ прямые, значит углы PIK и QIL равны, отсюда следует равенство прямоугольных треугольников PIK и QIL. По теореме Фалеса длина KP=QL равна половине длины BP=BQ, а длина AQ вдвое больше длины BQ=BP.

Следовательно, длина стороны AB равна $AL+LB=\frac{6}{5}AL=\frac{6}{5}AO=\frac{3}{5}AC$. Из теоремы Пифагора $BC=\frac{4}{5}AC$. Следовательно, AB:BC:CA=3:4:5.

Второе решение. Пункт 1, точки M, P и Q те же, что как в первом решении, четырёхугольник PIQB является квадратом. В прямоугольном треугольнике AIO катет AI вдвое больше катета OI. Считаем длину OI равной единице, тогда площадь треугольника AIO равна 1, длина гипотенузы AO равна $\sqrt{5}$, а высота из вершины I равна $\frac{2}{\sqrt{5}}$. Эта высота и отрезки IP и IQ равны, как радиусы вписанной окружности, поэтому $AQ=\sqrt{AI^2-IQ^2}=\sqrt{4-\frac{4}{5}}=\frac{4}{\sqrt{5}}$. Следовательно, $AB=AQ+QB=\frac{4}{\sqrt{5}}+\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{6}{\sqrt{5}}$, и $AB:AC=AB:2\cdot AO=\frac{6}{\sqrt{5}}:2\sqrt{5}=3:5$. Из теоремы Пифагора $BC:AC=4:5$, откуда AB:BC:CA=3:4:5.

Критерии проверки. Обоснование того, что луч IO лежит внутри угла AIC, и величина угла AIC равна сумме величин углов AIO и CIO: 1 балл. Доказательство того, что угол ABC – прямой: 2 балла (включают предыдущий пункт).

11.5. За одну *операцию* к любой из нескольких лежащих на столе кучек камней можно прибавлять столько же, сколько в ней уже содержится, из любой другой. Доказать, что любая начальная раскладка N камней по кучкам может быть собрана в одной куче в результате некоторого количества операций тогда и только тогда, когда N является степенью двойки.

Доказательство. Для каждой кучки назовём её *показателем* максимальную степень двойки, на которую делится число содержащихся в ней камней, она может быть равна $1=2^0$. Рассмотрим поведение показателей кучек, участвующих в перекладывании. После перекладывания камней из кучки с $2^a(2k+1)$ камнями в кучку с $2^b(2l+1)$ камнями в первой остаётся $2^a(2k+1)-2^b(2l+1)$ камней, а во второй становится $2^{b+1}(2l+1)$ камней. Если $a=b$, то $2^a(2k+1)-2^b(2l+1)=2^{a+1}(k-l)$, поэтому оба показателя возрастут. Если $a\neq b$, то $2^a(2k+1)-2^b(2l+1)=2^c(2m+1)$, где $c=\min\{a,b\}$. При этом минимальный в данной паре кучек показатель сохраняется, а второй гарантированно становится больше минимального. Заметим, что количество кучек с минимальным среди всех показателем при произвольном перекладывании либо уменьшается на 2, либо не меняется.

Рассмотрим произвольную раскладку $N=2^t$ камней по более, чем одной кучке. В ней число кучек с минимальным показателем $2^s, s<t$ будет чётным. Действительно, общее число камней $N=2^t$ и сумма количеств камней в не минимальных кучках делятся на 2^{s+1} поэтому сумма количеств камней в минимальных кучках тоже делится на 2^{s+1}, значит, их количество делится на

2. Если в раскладке есть хотя бы две кучки, разбиваем все кучки с минимальным показателем на пары, выполняем в каждой перекладывание из большей в меньшую и получаем раскладку с большим минимальным показателем, чем рассматриваемая. Проделав эту процедуру не более, чем t раз, получим раскладку с минимальным показателем t, то есть – с единственной кучкой из $2^t = N$ камней.

Пусть теперь $N = 2^t(2k+1), k \ge 1$ не является степенью двойки. Рассмотрим любой процесс сборки некоторой раскладки N камней по кучкам в одну и произведём его в обратном порядке, посредством процедур перекладывания, обратных к исходным, когда половина одной из кучек перекладывается в другую. При этом в обратном процессе количество камней в первой кучке (она же последняя в исходном процессе сборки) и всех получающихся на каждом шаге будет делиться на нечётное число $2k+1$. Следовательно, любая раскладка, в которой есть кучка из числа камней, не делящегося на $2k+1$, не может быть собрана в одной кучке. В частности, не может быть собрана в одну раскладка {1, N-1} по двум кучкам.

Замечание 1. В случае $N = 2^t(2k+1)$ можно предложить другое решение того, что раскладка {1, N-1} по двум кучкам не может быть собрана в одну. Этого достаточно для доказательства *необходимости* в условии задачи, то есть того, что любая начальная раскладка N камней по кучкам может быть собрана в одной куче только тогда, когда N является степенью двойки.

Докажем по индукции, что после k перекладываний количества камней в кучках имеют вид $\{2^k - a_k \cdot N, (a_k+1) \cdot N - 2^k\}$ для некоторого целого числа $a_k \ge 0$. База индукции при $k=0$ очевидна: $\{1, N-1\} = \{2^0 - 0 \cdot N, 1 \cdot N - 2^0\}$, то есть $a_0 = 0$. Шаг индукции: либо мы перекладываем камни из правой кучки в левую, тогда в левой станет $2^{k+1} - 2a_k N$, а в правой останется $(2a_k+1)N - 2^{k+1}$ камней, при этом $a_{k+1} = 2a_k$, либо мы перекладываем камни из левой кучки в правую, тогда в левой останется $2^{k+1} - (2a_k+1)N$, а в правой станет $2(a_k+1)N - 2^{k+1}$ камней, при этом $a_{k+1} = 2a_k + 1$.

Если после некоторого k-ого перекладывания раскладки {1, N-1} останется всего одна кучка, то число камней в другой станет равным 0, следовательно, выполнится равенство одно из равенств $2^k - a_k \cdot N = 0$ или $(a_k+1) \cdot N - 2^k = 0$. В обоих случаях N будет делителем числа 2^k, то есть тоже степенью двойки - противоречие с тем, что в рассматриваемом случае $N = 2^t(2k+1)$. Следовательно, при любом N, отличном от степени двойки, раскладка {1, N-1} не может быть собрана в одну кучку.

Замечание 2. Объединяя оба случая $N = 2^t$ и $N = 2^t(2k+1)$, получаем доказательство более общего утверждения: раскладка N камней может быть собрана в одной кучке тогда и только тогда, когда количество камней в каждой её кучке делится на набольший нечётный делитель N.

Критерии проверки. Отдельно каждая из двух частей решения, необходимости и достаточности условия $N = 2^t$ для сборки, при отсутствии второй части, оцениваются в 3 балла.