Всесибирская открытая олимпиада школьников по математике

Первый этап **2018-2019 г.г.**

7 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

Время выполнения задания 4 астрономических часа

7.1. Вася нарисовал шестиугольник, а затем выбрал две его вершины и провёл через них прямую. Эта прямая отрезала от шестиугольника семиугольник. Как такое могло быть?

7.2. Скучающий Юра сложил два числа и получил третье. Затем, он изменил каждую цифру в этом примере на 1 в ту или иную сторону (например, из числа 239 он мог получить число 148, но не мог получить 140). Мог ли новый пример оказаться верным?

7.3. В школе 1000 школьников и 35 классов. Каждому школьнику на лбу написали, сколько в его классе учеников. Чему может равняться сумма чисел, обратных написанным? Перечислите все варианты и докажите, что других нет. Напомним, что к числу a обратным является число $1/a$.

7.4. Арсений сел за компьютер между 16 и 17 часами, когда часовая и минутная стрелки были направлены в противоположные стороны, а встал из-за него в этот же день между 22 и 23 часами, когда стрелки совпали. Сколько времени Арсений сидел за компьютером?

7.5. Несколько семиклассников решали задачи. Учитель не помнит, сколько было детей и кто из них сколько задач решил. Зато он помнит, что, с одной стороны, каждый решил больше, чем пятую от того, что решили остальные, а с другой стороны, каждый решил меньше, чем треть от того, что решили остальные. Сколько могло быть семиклассников? Найдите все варианты и докажите, что других нет.

Всесибирская открытая олимпиада школьников по математике

Первый этап **2018-2019 г.г.**

8 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

Время выполнения задания 4 астрономических часа

8.1. Расставьте по кругу цифры от 1 до 9 таким образом, что любые две соседние цифры, если их прочитать по часовой стрелке, образуют составное двузначное число. Достаточно привести один пример.

8.2. В соревновании участвует 2018 команд по доте, все разной силы. В поединке между двумя командами всегда побеждает более сильная. Все команды побились на пары и сыграли одну игру. Затем разбились на пары другим образом и сыграли ещё одну игру. Оказалось, что ровно одна команда выиграла обе игры. Как такое могло быть?

8.3. Юра выбрал три целых попарно различных числа a, b, c. Затем сложил числа a и b и получил число c. Потом он перемножил числа b и c и получил a. Найдите все такие тройки чисел и докажите, что других нет.

8.4. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом B и углом A, равным 30, провели высоту BD. Затем в треугольнике BDC провели медиану DE, а в треугольнике DEC – биссектрису EF. Найдите отношение FC к AC.

8.5. Одиннадцать лучших футбольных команд сыграли каждая с каждой по одному матчу. При этом оказалось, что каждая команда забила в первом матче 1 гол, во втором матче 2 гола, …, в десятом матче — 10 голов. Какое наибольшее количество сыгранных матчей могло закончиться вничью?

Всесибирская открытая олимпиада школьников по математике

Первый этап **2018-2019 г.г.**

9 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

9.1. Из пунктов А и Б навстречу друг другу с постоянными скоростями одновременно выехали соответственно мотоциклист и велосипедист. Спустя 20 минут после старта мотоциклист оказался на 2 км ближе к Б, чем середина АБ, а спустя 30 минут велосипедист оказался на 3 км ближе к Б, чем середина АБ. Через сколько минут после старта встретились мотоциклист и велосипедист?

9.2. Может ли число, оканчивающееся на 222, быть нетривиальной степенью некоторого натурального числа, то есть представляться в виде x^y, где $x, y > 1$- натуральные числа?

9.3. Вася должен на каждой грани нескольких кубиков написать по одной цифре так, чтобы любую упорядоченную комбинацию из трёх цифр от 000 до 999 включительно можно было получить, выбрав некоторых три различных кубика и положив их подходящими сторонами вверх в нужном порядке. При этом цифры 6 и 9 при повороте на 180 градусов не считаются переходящими друг в друга. Какое минимальное количество кубиков должен использовать Вася?

9.4. На стороне АС треугольника АВС выбрана точка Р такая, что РС=2АР. Точка О – центр вписанной окружности треугольника РВС, Е – точка касания этой окружности с прямой РВ. Оказалось, что РВ=ВС. Доказать, что прямая АЕ параллельна прямой РО.

9.5. На доске записаны 10 чисел: 1,2,3,4,4,5,5,11,12,13. С ними можно производить операции двух типов: либо из любых девяти из них вычесть 1, а к оставшемуся прибавить 9, либо наоборот, из одного вычесть 9, а к остальным прибавить по 1. При этом отрицательные числа получать нельзя.
Можно ли, применив несколько таких операций, сделать все десять чисел разными?

Всесибирская открытая олимпиада школьников по математике

Первый этап **2018-2019 г.г.**

10 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

10.1. Найти все числа a и b, для которых равенство $|ax+by|+|bx+ay|=|x|+|y|$ выполнено при всех значениях переменных x и y.

10.2. Найти все пары натуральных чисел x и y таких, что их наименьшее общее кратное равно $1+2x+3y$.

10.3. Найти количество различных способов расстановки 8 ладей в клетках шахматной доски 8 на 8 таких, чтобы каждая клетка доски находилась под боем хотя бы одной из них. Ладьи могут бить друг друга, ладья бьёт все клетки горизонтали и вертикали, в которой она стоит, включая саму клетку, в которой стоит.

10.4. Пусть для положительных чисел a,b,c,x,y,z выполнены соотношения: $ac-b^2>0$ и $az-2by+cx=0$. Доказать, что тогда $xz-y^2\le 0$.

10.5. Доказать, что разность длин диагонали A_1A_4 и стороны A_1A_2 правильного десятиугольника $A_1A_2A_3 \ldots A_{10}$ равна радиусу его описанной окружности. Десятиугольник называется *правильным*, если все его углы равны между собой и все его стороны равны между собой.

Всесибирская открытая олимпиада школьников по математике

Первый этап **2018-2019 г.г.**

11 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

11.1. Параболы P и S являются графиками функций $y = kx^2$ и $y = kx^2 + b, b > 0$ соответственно. Доказать, что любая хорда параболы P, касающаяся параболы S, делится этой точкой касания на два равных отрезка.

11.2. Найти количество пятизначных чисел, у которых в записи содержатся две цифры, одна из которых делится нацело на другую.

11.3. На сторонах AB и AC треугольника ABC выбраны соответственно точки M и P такие, что отрезок PM параллелен стороне BC. Из точки M восстановлен перпендикуляр к прямой AB, а из P восстановлен перпендикуляр к AC, их точку пересечения обозначена за T. Доказать, что точки A, T и O – центр описанной окружности треугольника ABC – лежат на одной прямой.

11.4. Пусть a, b, c произвольные числа из интервала $(0,1)$. Доказать, что одно из трёх произведений $a(1-b), b(1-c), c(1-a)$ всегда не больше 1/4.

11.5. Найти все пары натуральных чисел a и b такие, что оба числа $\frac{a^2 + b}{b^2 - a}$ и $\frac{b^2 + a}{a^2 - b}$ являются целыми.