7.4. На квадратной доске со стороной 2017 в левом нижнем углу стоит шахматный слон. Алексей и Данил по очереди ходят этим слоном, первый ходит Алексей, причём игрокам запрещается ходить в клетки, в которых слон уже был (слон ходит по диагонали на любое расстояние). Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из мальчиков может гарантировать себе выигрыш вне зависимости от действий соперника?
Ответ: Данил.
Решение: Опишем стратегию игры Данила и докажем, что побеждает именно он.
1) Если Алексей своим ходом оказывается на главной диагонали, ходим в любую клетку на этой же диагонали. Это всегда можно сделать, так как изначально непосещённых клеток на ней чётное число, а после хода Алексея всегда нечётное.
2) Если Алексей ходит в клетку вне главной диагонали, то мы идём в клетку, зеркально симметричную ей относительно главной диагонали. Очевидно, что до этого посетить эту клетку мы не могли.
Так как у Данила всегда есть, куда сходить, а клеток конечное число, Алексей обязательно проиграет.
Критерии: только ответ — 0 баллов.
Только стратегия без объяснения, почему она работает — не более 3 баллов.
Если в подобном решении не отмечено, почему Данил побеждает из-за конечности игры — снимать 1 балл.

7.5. Егор, Никита и Иннокентий по очереди играли в шахматы друг с другом (двое играют, один смотрит). Причём, после каждой партии проигравший уступал место за доской зрителю (ничьих не было). В итоге оказалось, что Егор участвовал в 13 партиях, а Никита – в 27. Сколько партий сыграл Иннокентий?
Ответ: 14.
Решение: С одной стороны, партий было не менее 27. С другой стороны, игрок не может пропустить две партии подряд, то есть каждый играет не реже, чем каждую вторую партию. Поэтому, если партий было хотя бы 28, Егор бы поучаствовал хотя бы в 14, что противоречит условию. Значит, партий было сыграно ровно 27, и в каждой участвовал Никита. В 13 из них его соперником был Егор, значит, в 14 оставшихся это был Иннокентий, и это и есть ответ.
Критерии: Только ответ, ответ с проверкой – 0 баллов.

Если считается, что “Раритет” не встречает первый и/или последний теплоходы — баллы не снимать.

8.4. На квадратной доске со стороной N, где N — некоторое натуральное число, в левом нижнем углу стоит шахматный слон. Алексей и Данил по очереди ходят этим слоном, первый ходит Алексей, причём игрокам запрещается ходить в клетки, в которых слон уже был (слон ходит по диагонали на любое расстояние). Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из мальчиков может гарантировать себе выигрыш вне зависимости от действий соперника?
Ответ: N нечётное – выигрывает Данил, N чётное – Алексей.
Решение: Если N нечётное, опишем стратегию игры Данила и докажем, что побеждает именно он.
1) Если Алексей своим ходом оказывается на главной диагонали, ходим в любую клетку на этой же диагонали. Это всегда можно сделать, так как изначально непосещённых клеток на ней чётное число, а после хода Алексея всегда нечётное.
2) Если Алексей ходит в клетку вне главной диагонали, то мы идём в клетку, зеркально симметричную ей относительно главной диагонали. Очевидно, что до этого посетить эту клетку мы не могли.
Так как у Данила всегда есть, куда сходить, а клеток конечное число, Алексей обязательно проиграет.
Если N чётное, то выигрывает Алексей, первым ходом сходив куда угодно на главной диагонали, а затем придерживаясь точно такой же стратегии, как и Данил в нечётном случае. Очевидно, что доказательство корректности алгоритма сохранится.
Критерии: только ответ — 0 баллов.
Полностью доказан только один случай — не более 5 баллов.
Только стратегия без объяснения, почему она работает — не более 3 баллов.
Если в подобном решении не отмечено, почему игрок побеждает из-за конечности игры — снимать 1 балл.

8.5. Егор, Никита и Иннокентий по очереди играли в шахматы друг с другом (двое играют, один смотрит). Причём, после каждой партии проигравший уступал место за доской зрителю (ничьих не было). В итоге оказалось, что Егор участвовал в 13 партиях, а Никита – в 27. Сколько партий сыграл Иннокентий?
Ответ: 14.
Решение: С одной стороны, партий было не менее 27. С другой стороны, игрок не может пропустить две партии подряд, то есть каждый играет не реже, чем каждую вторую партию. Поэтому, если партий было хотя бы 28, Егор бы поучаствовал хотя бы в 14, что противоречит условию. Значит, партий было сыграно ровно 27, и в каждой участвовал Никита. В 13 из них его соперником был Егор, значит, в 14 оставшихся это был Иннокентий, и это и есть ответ.
Критерии: Только ответ, ответ с проверкой – 0 баллов.

Решения заданий второго этапа Всесибирской открытой олимпиады школьников 2016-2017 г.г. по математике

9 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

9.1. Купец купил в Твери несколько мешков соли и продал их в Москве с прибылью в 100 рублей. На все вырученные деньги он снова купил в Твери соль (по тверской цене) и продал в Москве (по московской цене). На этот раз прибыль составила 120 рублей. Сколько денег он потратил на первую покупку?
Ответ. 500 рублей.

Решение. Дополнительно потраченные во второй раз 100 рублей принесли купцу дополнительные 20 рублей прибыли. Значит, в первый раз, чтобы получить $5 \cdot 20 = 100$ рублей прибыли, купец должен был заплатить $5 \cdot 100 = 500$ рублей.

Второе решение. Обозначим сумму первой покупки за x, тогда на вложенный в Твери рубль он получит в Москве $\frac{x+100}{x}$ рублей. Следовательно, после второй покупки-продажи он получит $\frac{x+100}{x}(x+100) = x+100+120$ рублей. Решая, получим $x = 500$.

Критерии проверки. Только ответ с проверкой: 2 балла.

9.2. По окружности выписано 10 чисел, сумма которых равна 100. Известно, что сумма каждых трех чисел, стоящих рядом, не меньше 29. Укажите такое наименьшее число A, что в любом наборе чисел, удовлетворяющем условию, каждое из чисел не превосходит A.
Ответ. $A = 13$.
Решение. Пусть X – наибольшее из выписанных чисел. Оставшиеся числа разобьем на 3 тройки "соседей". Сумма чисел в каждой такой тройке не меньше 29, следовательно, $X \leq 100 - 3 \cdot 29 = 13$. Пример набора с максимальным числом 13: 13, 9, 10, 10, 9, 10, 10, 9, 10, 10.
Критерии проверки. Доказано, что искомое число не меньше 13: 4 балла. Пример для 13: 3 балла.

9.3. В четырёхугольнике $ABCD$ точки P,Q,R,S – середины сторон AB,BC,CD,DA соответственно, а T – точка пересечения отрезков PR и QS. Докажите, что сумма площадей четырёхугольников $APTS$ и $CRTQ$ равна половине площади четырёхугольника $ABCD$.
Доказательство. Покажем, что площадь четырёхугольника $PQRS$ равна половине площади $ABCD$. Заметим, что отрезок PS является средней линией треугольника ABD, поэтому площадь треугольника APS равна четверти площади треугольника ABD. Аналогично, площадь треугольника QCR равна четверти площади треугольника BCD, а сумма площадей QCR и APS равна четверти площади $ABCD$. Так же доказывается, что и сумма площадей PBQ и RDS равна четверти площади $ABCD$. Наконец, площадь $PQRS$ равна разности площадей $ABCD$ и треугольников QCR, APS, PBQ *и* RDS, то есть половине площади $ABCD$.
Окончательно**,** сумма площадей четырёхугольников $APTS$ и $CRTQ$ равна сумме площадей треугольников QCR и APS и треугольников PST и QRT. Последняя составляет половину площади параллелограмма $PQRS$, поэтому ответом является сумма двух четвертей площади $ABCD$, то есть половине площади $ABCD$.
Критерии проверки. Доказано того, сумма площадей QCR и APS равна четверти площади $ABCD$: 2 балла. Доказано что площадь четырёхугольника $PQRS$ равна половине площади $ABCD$: 3 балла. Идея разбиения суммы площадей четырёхугольников $APTS$ и $CRTQ$ на сумму площадей треугольников QCR и APS и треугольников PST и QRT: 1 балл.

9.4. Найдите наименьшее натуральное число, в записи которого каждая цифра встречается ровно по одному разу и которое делится на 990.
Ответ. 1234758690.
Решение. Число 990 есть произведение взаимно простых чисел 2,5,9 и 11. Любое десятизначное число, составленное из различных цифр, взятых по разу, делится на 9, так как их сумма, равная 45, делится на 9. По признаку делимости на 10 искомое число должно оканчиваться на 0. Осталось разобраться с делимостью на 11.
Признак делимости на 11 звучит так: число делится на 11 тогда и только тогда, когда разность между суммой всех его цифр, стоящих на нечётных по порядку слева направо местах и суммой его цифр, стоящих на чётных местах, делится на 11. Оценим значение S суммы цифр искомого числа, стоящих на нечётных местах: оно не меньше 1+2+3+4+5=15 и не больше 5+6+7+8+9=35. Следовательно, разность между суммой всех цифр числа, стоящих на нечётных местах и суммой его цифр, стоящих на чётных местах, равная 2S-45, является нечётным числом из интервала от -15 до 25, делящимся на 11.
Таких чисел всего два: -11 и 11, для них S соответственно, равна 17 и 28. Легко убедиться, что для S=17 есть только два варианта S=1+2+3+4+7 и S=1+2+3+5+6. Соображения минимальности дают для них число 1526384970.
Для S=28 будем выписывать по порядку минимально возможные цифры слева направо, пока это возможно с соблюдением условия, что сумма цифр на местах с нечётными номерами может быть равна в итоге 28, а сумма цифр на местах с чётными номерами – 17. Получится 1234, далее сумма оставшихся 3 цифр на пятом, седьмом и девятом местах должна равняться 24, что возможно только, если они равны 7,8 и 9, откуда и получается число в ответе. Оно меньше, чем ранее найденное 1526384970 для S=17. Если бы можно было найти меньшее число, для него было бы S=28 и пятая слева цифра была бы меньше 7, что, как мы поняли, невозможно.
Критерии проверки. Если ответ угадан и проверена делимость: 1 балл. Найдены возможные значения S: 2 балла. Ответ выписан, а потом полным перебором доказана минимальность: 7 баллов.

9.5. Пусть M – конечное множество чисел (различных). Известно, что среди любых трех его элементов найдутся два, сумма которых принадлежит M. Какое наибольшее число элементов может быть в M?
Ответ. 7.
Решение. Пример множества из 7 элементов: {–3, –2, –1, 0, 1, 2, 3}.
Докажем, что множество $M = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ из $n > 7$ чисел требуемым свойством не обладает. Можно считать, что $a_1 > a_2 > a_3 > ... > a_n$ и $a_4 > 0$ (смена знаков всех элементов наше свойство не меняет). Тогда $a_1 + a_2 > a_1 + a_3 > a_1 + a_4 > a_1$, т. е. ни одна из сумм $a_1 + a_2$, $a_1 + a_3$ и $a_1 + a_4$ множеству M не принадлежит. Кроме того, суммы $a_2 + a_3$ и $a_2 + a_4$ не могут одновременно принадлежать M, поскольку $a_2 + a_3 > a_2 + a_4 > a_2$. Получается, что по крайней мере для одной из троек (a_1, a_2, a_3) и (a_1, a_2, a_4) сумма любых двух ее элементов множеству M не принадлежит.
Критерии проверки. Доказано, что в M не больше 7 элементов: 5 баллов. Пример для 7 элементов: 2 балла.

10 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

10.1. Шестнадцать рыбаков, разбитых на три группы, вместе поймали 113 рыб. Каждый рыбак первой группы поймал по 13 рыб, второй — по 5 рыб, третьей — по 4 рыбы. Сколько рыбаков в каждой группе?
Ответ. В первой группе 5 рыбаков, во второй группе 4 рыбака, в третьей группе 7 рыбаков.
Решение. Обозначим количество рыбаков в группах через x, y, z соответственно. По

условию, $x+y+z=16, 13x+5y+4z=113$. Вычитаем учетверённое первое уравнение из второго, получаем $9x+y=49$, откуда $49-9x\geq 0$, значит $x\leq 5$. С другой стороны, $x+y=49-8x\leq x+y+z=16$, значит $x\geq \frac{33}{8}$, откуда $x\geq 5$. Следовательно, подходить может единственный вариант: $x=5, y=4, z=7$. Проверяем его подстановкой во второе уравнение и убеждаемся, что это решение

Критерии проверки. Ответ найден угадыванием с проверкой: 1 балл. Ответ найден полным грамотным перебором вариантов, приведённом в решении: 7 баллов. Если в процессе перебора в тексте решения что-нибудь пропущено: не выше 2 баллов. Выписаны уравнения, но не решены: 2 балла.

10.2. Найдите наибольшее натуральное число, делящееся на 990, в записи которого каждая цифра встречается ровно по одному разу.

Ответ. 9876524130.

Решение. Число 990 есть произведение взаимно простых чисел 2,5,9 и 11. Любое десятизначное число, составленное из различных цифр, взятых по разу, делится на 9, так как их сумма, равная 45, делится на 9. По признаку делимости на 10 искомое число должно оканчиваться на 0. Осталось разобраться с делимостью на 11.

Признак делимости на 11 звучит так: число делится на 11 тогда и только тогда, когда разность между суммой всех его цифр, стоящих на нечётных по порядку слева направо местах и суммой его цифр, стоящих на чётных местах, делится на 11. Оценим значение S суммы цифр искомого числа, стоящих на нечётных местах: оно не меньше 1+2+3+4+5=15 и не больше 5+6+7+8+9=35. Следовательно, разность между суммой всех цифр числа, стоящих на нечётных местах и суммой его цифр, стоящих на чётных местах, равная 2S-45, является нечётным числом из интервала от -15 до 25, делящимся на 11.

Таких чисел всего два: -11 и 11, для них S соответственно, равна 17 и 28. Легко убедиться, что для S=17 есть только два варианта S=1+2+3+4+7 и S=1+2+3+5+6. Соображения максимальности дают для них число 79483625140.

Для S=28 будем выписывать по порядку максимально возможные цифры слева направо, пока это возможно с соблюдением условия, что сумма цифр на местах с нечётными номерами может быть равна в итоге 28, а сумма цифр на местах с чётными номерами – 17. Получится 98765, далее сумма оставшихся двух цифр на шестом и восьмом местах должна равняться 3, что возможно только, если они равны 1 и 2, откуда и получается число в ответе. Оно больше, чем ранее найденное 79483625140 для S=17. Если бы можно было найти большее число, для него было бы S=28 и шестая слева цифра была бы больше 2, что, как мы поняли, невозможно.

Критерии проверки. . Если ответ угадан и проверена делимость: 1 балл. Найдены возможные значения S: 2 балла. Ответ выписан, а потом полным перебором доказана максимальность: 7 баллов.

10.3. В окружность вписан четырёхугольник *ABCD*. Докажите, что точки пересечения медиан треугольников *ABC, BCD,CDA* и *DAB* лежат на одной окружности.

Доказательство. Докажем, что стороны четырёхугольника, образованного точками пересечения медиан треугольников *ABC, BCD, CDA* и *DAB* параллельны (и пропорциональны) сторонам исходного четырёхугольника *ABCD*. Значит, он имеет те же углы и является вписанным тогда и только тогда, когда вписанным является *ABCD*.

Обозначим середину стороны *CD* за *M*, а точки пересечения медиан треугольников BCD и *CDA* за *P* и *Q*. По свойству медиан, *AQ:QM=2:1=BP:PM*, по теореме, обратной теореме Фалеса это влечёт параллельность *PQ* и *AB* (и то, что отношение их длин равно 1 к 3). Аналогично доказывается параллельность остальных пар сторон. Строго говоря, отсюда

следует подобие четырёхугольников с коэффициентом 1/3, но это для решения задачи не нужно.
Критерии проверки. Доказательство параллельности сторон четырёхугольника, образованного точками пересечения медиан и *ABCD*: 5 баллов. Применение этого для вписанности четырёхугольника, образованного точками пересечения медиан: 2 балла.

10.4. Найти все множества из четырёх действительных чисел таких, что каждое число в сумме с произведением трёх остальных равно 2.
Ответ. $\{1,1,1,1\}$, $\{-1,-1,-1,3\}$, $\{-1,-1,3,-1\}$, $\{-1,3,-1,-1\}$ и $\{3,-1,-1,-1\}$.
Решение. Обозначим числа искомой четвёрки за a,b,c,d. По условию, $a+bcd=b+acd=2$, из первого равенства имеем $(a-b)(1-cd)=0$, причём, если $a\neq b, cd=1$ и из второго равенства $a+b=2$. Следовательно, для любой пары чисел из нашей либо эти числа равны, либо их сумма равна 2 и произведение оставшейся пары чисел равно 1. В частности, среди чисел нашей четвёрки содержится максимум два различных числа.
1) Все четыре числа равны между собой, тогда $a^3+a=2$. Ввиду монотонности функции $f(x)=x^3+x$, являющейся суммой двух монотонно возрастающих функций $f(x)=x^3$ и $f(x)=x$, решение будет единственно: $a=1$. Получаем первую искомую четвёрку $\{1,1,1,1\}$.
2) Часть чисел (не менее двух) равна a, остальные (не менее одного) равны $2-a$. Если чисел, равных a, ровно два, то $a(2-a)=1$, откуда $a=1$ и мы имеем на самом деле случай 1). Если чисел, равных a ровно три, то $a^2=1$ и, либо $a=1$ и мы опять получаем случай 1), либо $a=-1$ и мы получаем новую искомую четвёрку $\{-1,-1,-1,3\}$. Добавляя решения, получающиеся перестановками переменных, получим три новых четвёрки.
Критерии проверки. Разобран с доказательством только случай, когда все числа равны: 2 балла. Потеря случая равных чисел: минус 2 балла. Потеря симметричных решений: минус 1 балл.

10.5. В каждой клетке таблицы 5 на 5 записано по одной букве так, что в любой строке и в любом столбце не больше трёх различных букв. Какое наибольшее число различных букв может быть в такой таблице?
Ответ. 11.
Решение. Если в каждой строке не больше двух различных букв, то общее их число не превосходит 10=5*2. Далее можно считать, что в первой строке ровно три различных буквы. Если каждая из оставшихся строк имеет хотя бы одну общую букву с первой, то общее число букв не превосходит 3+4*2=11. Пусть имеется строка, можно считать, вторая, в которой три различных буквы, отличных от букв первой строки. Тогда в каждом столбце кроме букв первой и второй строк может быть не более одной новой буквы, всего не более 3+3+5*1=11.
Пример расстановки 11 различных букв: по главной диагонали таблицы из левого нижнего угла в правый верхний записаны первые пять различных букв, по соседней снизу диагонали — следующие четыре, в левом верхнем углу — десятая, а в остальных клетках — одиннадцатая буквы.
Критерии проверки. Доказана максимальность 11: 5 баллов. Пример для 11: 2 балла. Любой неверный ответ и попытка его доказательства: 0 баллов.

11 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

11.1. Найти все целые положительные решения уравнения $(n+2)!-(n+1)!-(n)!=n^2+n^4$.
Ответ. $n=3$.
Решение. Перепишем уравнение в виде $n!=(n*(n^2+1))/(n+2)$. Преобразовывая правую часть, получим $n!=n^2-2n+5-10:(n+2)$. Последняя дробь будет целым числом при n=3 и n=8, но

последнее число не является решением (подставьте!)

Критерии проверки. Приобретение лишних решений: минус 3 балла. Угадан и проверен ответ: 1 балл.

11.2. Какое из чисел больше, $2^{\sqrt{\log_3 2}}$ или $3^{\sqrt{\log_2 3}}$?

Ответ. $3^{\sqrt{\log_2 3}}$ больше, чем $2^{\sqrt{\log_3 2}}$.

Решение. Двойка меньше тройки, поэтому $\log_3 2 < 1$ и $\sqrt{\log_3 2} < 1$, следовательно, $2^{\sqrt{\log_3 2}} < 2^1 = 2$. С другой стороны, $\log_2 3 > 1$ и $\sqrt{\log_2 3} > 1$, следовательно, $3^{\sqrt{\log_2 3}} > 3^1 = 3 > 2 > 2^{\sqrt{\log_3 2}}$, что и требовалось доказать.

Критерии оценивания. Приближённые вычисления на калькуляторе: 0 баллов.

11.3. Квадрат со стороной 4 см разделён тремя параллельными горизонтальными и тремя параллельными вертикальными линиями на 16 квадратиков со стороной 1 см. Стороны этих квадратиков, включая и те, которые расположены на границе большого квадрата, будем называть *единичными отрезками*. Сколькими способами можно задать на каждом из 40 единичных отрезков ориентацию так, чтобы общая сумма всех полученных 40 векторов была равна 0? Ответ можно дать в виде формулы, не обязательно доводить его до числа.

Ответ. $C_{20}^{10} \cdot C_{20}^{10}$.

Решение. Всего будет по 20 горизонтальных и вертикальных отрезков. Если считать их расположенными вдоль координатных осей OX и OY соответственно, и обозначить количество положительно ориентированных горизонтальных и вертикальных отрезков за x и y соответственно, то координаты суммы всех полученных векторов будут равны $(2x-20, 2y-20)$. Следовательно, чтобы сумма всех векторов равнялась нулю, необходимо и достаточно, чтобы ровно половина горизонтальных и ровно половина вертикальных отрезков были ориентированы положительно, а остальные — отрицательно. При этом безразлично, какие именно. C_{20}^{10} способов выбора 10 из 20 горизонтальных положительно ориентированных отрезков и C_{20}^{10} способов выбора 10 из 20 вертикальных положительно ориентированных отрезков независимы друг от друга, поэтому ответом будет число $C_{20}^{10} \cdot C_{20}^{10}$.

Критерии оценивания. Доказательство того, что ровно половина горизонтальных и ровно половина вертикальных отрезков ориентированы положительно, а остальные — отрицательно: 3 балла.

11.4. Пусть O — точка пересечения диагоналей выпуклого четырёхугольника *ABCD*, а *P*, *Q*, *R*, *S* - точки пересечения медиан треугольников *AOB*, *BOC*, *COD* и *DOA* соответственно. Найти отношение площадей четырёхугольников *PQRS* и *ABCD*.

Ответ. $\frac{2}{9}$

Решение. Обозначим середины сторон *AB*, *BC*, *CD* и *DA* четырёхугольника *ABCD* через *X*,*Y*,*Z*,*T* соответственно. По свойству медиан, точки *P*, *Q*, *R*, *S* делят отрезки *OX*,*OY*,*OZ*,*OT* в отношении 2:1, считая от O. Следовательно, площадь четырёхугольника *PQRS* равна $(\frac{2}{3})^2 = \frac{4}{9}$ площади четырёхугольника *XYZT*. Покажем, что площадь последнего четырёхугольника равна половине площади *ABCD*. Заметим, что отрезок *XY* является средней линией треугольника *ABC*, поэтому площадь треугольника *XBY* равна четверти площади треугольника *ABC*. Аналогично, площадь треугольника *ZDT* равна четверти площади треугольника *CDA*, а сумма площадей *XBY* и *ZDT* равна четверти площади *ABCD*. Так же доказывается, что и сумма площадей *YCZ* и *TAX* равна четверти площади *ABCD*. Наконец, площадь *XYZT* равна разности площадей *ABCD* и треугольников *XBY*, *ZDT*, *YCZ* и *TAX*, то есть половине площади *ABCD.*

Окончательно**,** площадь четырёхугольника *PQRS* равна $\frac{1}{2}(\frac{2}{3})^2 = \frac{2}{9}$ площади четырёхугольника *ABCD.*

Критерии проверки. Доказано что площадь четырёхугольника *PQRS* равна $(\frac{2}{3})^2 = \frac{4}{9}$ площади четырёхугольника *XYZT:* 4 балла. Доказано что площадь четырёхугольника *XYZT* равна половине площади *ABCD:* 3 балла.

11.5. Алфавит состоит из n букв. Слово, составленное из этих букв, называется *разрешённым*, если все стоящие в нём рядом буквы различны и из него нельзя вычёркиванием букв получить слово вида $abab$, где буквы a и b различны. Какую максимальную длину может иметь разрешённое слово?

Ответ. $2n-1$.

Решение. Докажем методом математической индукции. При $n=1,2$ - очевидно. В произвольном слове w от $n+1$ буквы рассмотрим первую слева букву, назовём её a, если она больше не встречается в w, оставшаяся часть w является словом от n букв и по предположению индукции имеет длину не больше $2n-1$. Общая длина w при этом не превосходит $2n-1+1=2n<2n+1$.

Если a встречается в w ещё хотя бы раз, то подслова, на которые a разбивает w, не имеют общих букв. Иначе, убрав всё, кроме первой a, буквы b, встречающейся в разных подсловах и второй буква a, стоящей между этими b, получим слово $abab$, запрещённое условием. Пусть всего w содержит k вхождений a, оно разбивает w на k (если последняя буква w не a) или $k-1$ (если последняя буква w равна a) подслов, каждое из которых использует непересекающееся с другими множество букв. Длина каждого подслова оценивается по индукции как удвоенное число использованных в нём различных букв, уменьшенное на 1. Всего в этих словах задействовано n букв, поэтому общая суммарная длина всех подслов не превосходит $2n-(k-1)=2n-k+1$. Добавляем сюда k вхождений a, получим, что длина w не превосходит $(2n-k+1)+k=2n+1=2(n+1)-1$ - шаг индукции доказан.

Критерии проверки. Любой неверный ответ и попытка его доказательства: 0 баллов. Попытка доказательства, опирающаяся на то, что самое длинное слово обязательно имеет вид $a_1a_2...a_n...a_2a_1$: 0 баллов.