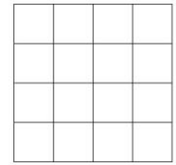
Всесибирская олимпиада школьников 2018-2019 г.г. по математике
Второй этап
7 класс

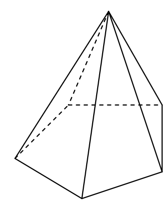
Каждая задача оценивается в 7 баллов.



7.1. Из 40 спичек сложили квадратную сетку 4 на 4 как показано на рисунке (каждый отрезок длины 1 – это одна спичка). Уберите 11 спичек так, чтобы оставшиеся не ограничивали ни одного прямоугольника.

7.2. У Арсения есть 10 столитровых вёдер, в которые налито 1, 2, 3, … 9, 10 литров воды соответственно. Арсению разрешается взять два любых ведра и перелить из первого во второе ровно столько воды, сколько уже есть во втором ведре. Может ли Арсений собрать всю воду в одном ведре?

7.3. Егор взял у Никиты в долг 28 рублей, а затем отдал их обратно четырьмя платежами. Оказалось, что Егор всегда возвращал целое количество рублей, а сумма выплаты каждый раз росла и нацело делилась на предыдущую. Какую сумму отдал Егор последней?

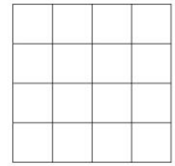


7.4. На поверхности пятиугольной пирамидки (см. рис.) в попарно различных точках живёт несколько гномиков, причём они могут жить как внутри граней, так и на рёбрах или в вершинах. Оказалось, что на каждой грани (включая вершины и рёбра, её ограничивающие) живёт разное число гномиков. Какое минимальное число гномиков живёт на пирамидке?

7.5. За круглым столом рассаживаются 47 депутатов из 12 различных регионов, причём они пытаются добиться того, чтобы среди любых 15 подряд сидящих людей были представители всех регионов. Смогут ли депутаты осуществить задуманное?

Всесибирская олимпиада школьников 2018-2019 г.г. по математике
Второй этап
8 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов.



8.1. Из 40 спичек сложили квадратную сетку 4 на 4 как показано на рисунке (каждый отрезок длины 1 – это одна спичка). Уберите 11 спичек так, чтобы оставшиеся не ограничивали ни одного прямоугольника.

8.2. У Арсения есть 2018 вёдер, в которые налито 1, 2, 3, … 2017, 2018 литров воды соответственно. Арсению разрешается взять два любых ведра и перелить из первого во второе ровно столько воды, сколько уже есть во втором ведре. Может ли Арсений собрать всю воду в одном ведре? Все вёдра достаточно большие, чтобы вся вода в них могла влезть.

8.3. В равностороннем треугольнике ABC через случайную точку внутри него провели три прямые: параллельно AB до пересечения с BC и CA; параллельно BC до пересечения с AB и CA; параллельно CA до пересечения с BC и AB. Докажите, что сумма трёх полученных отрезков равна удвоенной стороне треугольника ABC.

8.4. По кольцевой дороге бегают Никита и Егор, стартовавшие из одного места в противоположные стороны. Известно, что Никита пробегает круг на 12 секунд быстрее, чем Егор, но всё равно тратит на это больше 30 секунд. Оказалось, что в седьмой раз после старта они встретились в том же месте, откуда начали. За какое время каждый из них пробегает круг?

8.5. За круглый стол сели 410 депутатов, причём каждый из них являлся либо рыцарем, который всегда говорит правду, либо лжецом, который всегда лжёт. Каждый из депутатов сказал: “Среди моих двадцати соседей слева и двадцати соседей справа в сумме ровно 20 лжецов”. Известно, что за столом по крайней мере половина людей – лжецы. Сколько за столом рыцарей?

Всесибирская открытая олимпиада школьников по математике
Второй этап 2018-2019 г.г.
9 класс ***Каждая задача оценивается в 7 баллов***

9.1. Какую минимальную сумму цифр в десятичной записи может иметь число $f(n)=17n^2-11n+1$, где n пробегает все натуральные числа?

9.2. Какой цифрой может заканчиваться число $f(x)=\lfloor x\rfloor+\lfloor 3x\rfloor+\lfloor 6x\rfloor$, где x - произвольное положительное действительное число? Здесь $\lfloor x\rfloor$ обозначает целую часть числа x, то есть наибольшее целое число, не превосходящее x.

9.3. Внутри равнобедренного треугольника ABC с равными сторонами AB=BC и углом 80 градусов при вершине B, взята точка M такая, что угол MAC равен 10 градусов, а угол MCA равен 30 градусов. Найти величину угла AMB.

9.4. Докажите, что для произвольных положительных чисел a,b,c выполнено неравенство $\frac{ab}{a+b}+\frac{bc}{b+c}+\frac{ac}{a+c}\le\frac{a+b+c}{2}$.

9.5. Последовательность различных натуральных чисел $a_n, n=1,2,3...$ такова, что $a_1=1, a_{n+1}\le 2n$ при всех $n\ge 1$. Доказать, что для любого натурального числа m найдутся такие члены этой последовательности a_p и a_q, что $a_q-a_p=m$.

Всесибирская открытая олимпиада школьников по математике
Второй этап 2018-2019 г.г.
10 класс ***Каждая задача оценивается в 7 баллов***

10.1. Найти все четырёхзначные числа $\overline{xyzt}$, где все цифры x, y, z, t различны и не равны 0, такие, что сумма всех четырёхзначных чисел, получаемых из $\overline{xyzt}$ всевозможными перестановками цифр, в 10 раз больше числа $\overline{xxxx}$.

10.2. Найти все решения системы уравнений в действительных числах:

$$\begin{cases} x^3 - x + 1 = y^2, \\ y^3 - y + 1 = x^2. \end{cases}$$

10.3. Найти все натуральные числа n такие, что квадрат размера n на n клеток можно разрезать по линиям сетки на одноклеточный квадратик и четыре прямоугольника, все девять размеров сторон которых попарно различны.

10.4. Вне параллелограмма ABCD взята точка M такая, что угол MAB равен углу MCB и оба треугольника MAB и MCB расположены вне параллелограмма ABCD. Доказать, что угол AMB равен углу DMC.

10.5. По кругу записаны 32 числа $a_1, a_2, \dots, a_{32}$, каждое из которых равно -1 или 1. За одну операцию каждое число $a_n, n = 1,2,\dots,32$ заменяют на произведение $a_n a_{n+1}$ его и следующего за ним по циклу числа, при этом индексы рассматриваются циклически, $a_{33} = a_1, a_{34} = a_2$.и так далее. Докажите, что для любого начального набора чисел $a_1, a_2, \dots, a_{32}$ после некоторого конечного числа операций всегда получится набор из 32 единиц. Найдите наименьшее число N операций такое, что после применения N операций из любого начального набора чисел всегда получится набор из 32 единиц.

Всесибирская открытая олимпиада школьников по математике
Второй этап 2018-2019 г.г.
11 класс ***Каждая задача оценивается в 7 баллов***

11.1.. Какой цифрой может заканчиваться число $f(x)=\lfloor 2x\rfloor+\lfloor 3x\rfloor+\lfloor 5x\rfloor$, где x - произвольное положительное действительное число? Здесь $\lfloor x\rfloor$ обозначает целую часть числа x, то есть наибольшее целое число, не превосходящее x.

11.2..Найти все целые числа n такие, что число $15n^2-2n-1$ является степенью двойки.

11.3. Найти максимальное натуральное число А такое, что при любой расстановке всех натуральных чисел от 1 до 100 включительно в ряд в некотором порядке всегда найдутся десять последовательно расположенных чисел, сумма которых не меньше А..

11.4. На основании АС равнобедренного треугольника АВС взята произвольная точка М, через неё проведены прямые, параллельные боковым сторонам треугольника, пересекающие стороны АВ и ВС в точках Р и Т соответственно. Доказать, что точка Е, симметричная М относительно прямой РТ, лежит на описанной окружности треугольника АВС.

11.5. Последовательность положительных действительных чисел $a_n, n=1,2,3,\ldots$.такова, что $a_n{}^2<a_n-a_{n+1}$. Докажите, что $a_n<\frac{1}{n}$ для всех $n=1,2,3,\ldots$